Set

فصل ۱ «مجموعه»

# فصل در یک نگاه

## بازه‌ها

- مفهوم: زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی.
- اگر شامل $\infty$ نباشد:

| بازه | $[a,b]$ | $(a,b)$ | $[a,b)$ | $(a,b]$ |
|---|---|---|---|---|
| نمایش روی محور | a b | a b | a b | a b |

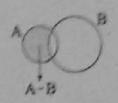
- اگر شامل $\infty$ باشد:

| بازه | $[a,+\infty)$ | $(a,+\infty)$ | $(-\infty,b)$ | $(-\infty,b]$ |
|---|---|---|---|---|
| نمایش روی محور | a | a | b | b |

- بازه‌های جدا از هم: این‌ها را به شکل اجتماعِ چند بازه بنویس.
- بازه‌ی معروف: $\mathbb{R}-\{a\}=(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$

## مجموعه

- مجموعه‌های معروف
  - طبیعی: $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$
  - حسابی: $\mathbb{W}=\{0,1,2,3,\dots\}$
  - صحیح: $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots\}$
  - گویا: اعداد کسری که صورت و مخرج آن‌ها عدد صحیح است و مخرج، مخالف صفر. $\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{Z},b\neq0\}$
  - گنگ: اعدادی که گویا نباشند $\mathbb{Q}'=\{x\mid x\notin\mathbb{Q}\}$
  - حقیقی: هر عددی که می‌شناسیم، در آن هست! $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$
  - رابطه‌ی بین مجموعه‌های معروف
    - $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$
    - $\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$
    - $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\varnothing$
- تفاضل دو مجموعه
  - شکل:

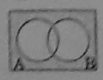



  - مفهوم: $A-B$ عضوهایی را شامل می‌شود که در $A$ هستند ولی در $B$ نیستند.
  - پیدا کردن: از روی عضوهای $A$، عضوهای $A\cap B$ را خط بزنید.
  - تعداد اعضا: $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
  - برای معروف‌ها: $\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{R}-\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}$
- مرجع: هر عضوی که از آن در یک بحث، استفاده می‌کنیم عضوِ این $U$ است!
- متمم: متمم مجموعه‌ی $A$، می‌شود:
  - به فارسی: اعضایی از $U$ که در $A$ نیستند.
  - به ریاضی: $A'=U-A$
- متناهی و نامتناهی
  - متناهی: اعضایش قابل شمارش‌اند و محدود.
  - نامتناهی: اعضایش قابل شمارش نیستند یا نامحدود عضو دارد.

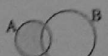
## عملیات با مجموعه‌ها

- در حضور متمم
  - دبل: $(A')'=A$
  - دمورگان
    - $(A\cap B)'=A'\cup B'$
    - $(A\cup B)'=A'\cap B'$
  - با اجتماع و اشتراک
    - $A\cup A'=U$
    - $A\cap A'=\varnothing$
  - با منها
    - $A-A'=A$
    - $A'-A=A'$
  - تهی و مرجع
    - $\varnothing'=U$
    - $U'=\varnothing$
- در حضور زیرمجموعه
  - $A\subseteq B\Rightarrow B'\subseteq A'$
  - $A\subseteq B\Rightarrow A-B=\varnothing$
  - $A\subseteq B$
    - $A\cup B=B$
    - $A\cap B=A$
  - $A-B=B'-A'$
- تعداد اعضا
  - اجتماع: (حداقل یکی از دو ویژگی) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

  - هیچ‌کدام از دوتا: $n(A'\cap B')=n(U)-n(A)-n(B)+n(A\cap B)$




  - منها: $n(A-B)=n(A)-n\ A\cap B$




  - دقیقاً یک ویژگی از میانِ دو تا ویژگی: $n(A)+n(B)-2n(A\cap B)$

عضوی

ن

مجموعه یعنی: اگر یکی



Scanned by CamScanner

# فصل در یک نگاه

## دنباله

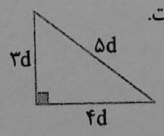
- **مفهوم:** تعدادی عدد که دنبالِ هم نوشته شده‌اند.
- **خطی**
  - **مفهوم:** تفاضلِ جمله‌های متوالیِ این دنباله، عددی ثابت است؛ ...,۵,۹,۱۳,۱۷
  - **جمله‌ی عمومی:** $t_n = an + b$ ← (حالت خاص: $a = 0$) ← دنباله ثابت است؛ ...,۳,۳,۳
- **درجه‌ی دو**
  - **جمله‌ی عمومی:** $t_n = an^2 + bn + c$
  - **به‌دست آوردن ضابطه:** با داشتنِ حاصلِ سه جمله از دنباله و شماره‌ی آن‌ها، دُرست مثل تابع، در جمله‌ی عمومی دنباله، شماره‌ها را جای‌گذاری کرده و مساویِ مقدارِ جمله بگذارید. در آخر هم دستگاه حل کنید.
  - **شناسایی:** دنباله‌ای درجه دو است که اختلافِ جمله‌های متوالی آن، به‌صورت یک دنباله‌ی حسابی پیش بروند:

$$5 \xrightarrow{+3} 8 \xrightarrow{+5} 13 \xrightarrow{+7} 20, \ldots \qquad \xrightarrow{+2} \qquad a = \frac{d}{2}$$

- **معروف‌ها**
  - مضرب‌های عددِ ثابتِ k: $t_n = kn$
  - **مربعی**
    - جمله‌ی عمومی: $t_n = n^2$
    - فرم: مربعِ عددهای طبیعی‌اند ← (شکل)

  - **مثلثی**
    - جمله‌ی عمومی: $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$
    - فرم: ۱,۳,۶,۱۰,... ← (شکل)

  - **یک در میان + و − دارد**
    - با منفی شروع می‌شود ← $(-1)^n$ را در فرمِ کلیِ جمله‌ها ضرب کن.
    - با مثبت شروع می‌شود ← $(-1)^{n+1}$ را در فرمِ کلیِ جمله‌ها ضرب کن.
  - **فیبوناتچی**
    - دو جمله‌ی اول: همیشه ۱ و ۱ هستند.
    - جمله‌ی عمومی: از جمله‌ی سوم به بعد: $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$
    - به زبان فارسی: هر جمله می‌شود مجموعِ دو جمله‌ی قبلیِ آن.
    - جمله‌ها: ...,۱,۱,۲,۳,۵,۸,...
- **شناسایی**
  - اختلافِ هر دو جمله‌ی متوالی دنباله، عددی ثابت است به نامِ d. $d = t_n - t_{n-1}$
  - علامتِ d:
    - $d > 0$ : دنباله صعودی است.
    - $d < 0$ : دنباله نزولی است.
- **وقتی سه جمله، یک دنباله‌ی حسابی‌اند**
  - آن سه جمله داده شده‌اند ← (واسطه‌ی حسابی) اگر a, b, c دنباله‌ی حسابی باشند: $b = \frac{a+c}{2}$
  - یک ویژگی از آن سه جمله داده شده است ← آن‌ها را $a-d, a, a+d$ بگیرید ← (بعد) اعمالِ ویژگی
- **در مثلث**
  - سه زاویه، دنباله‌ی عددی‌اند ← زاویه‌ی وسطی $60^\circ$ است.
  - سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه، دنباله‌ی عددی‌اند ← (شکل)




## دنباله‌ی حسابی

- **جمله‌ی عمومی**
  - فرمول: $t_n = t_1 + (n-1)d$
  - داده شده است.
    - فرم: بر حسبِ n، درجه‌ی اول است.
    - d: همان ضریبِ n است؛ $t_n = \boxed{3}\,n - 5$
    - $t_1$: به جایِ n، بذار ۱.
- **تعداد اعداد موجود در دنباله‌ی عددی:** $n = \frac{\text{عدد اول} - \text{عدد آخر}}{d} + 1$



Scanned by CamScanner

# فصل ۲ «الگو و دنباله»

**فرمول دو جمله و شماره:** (وقتی دو جمله از دنباله و شماره‌ی آن‌ها را داری)

- فرمول: $t_m - t_n = (m-n)d$
- کاربرد:
  - d رو پیدا کن.
  - هر جمله‌ی دنباله رو با داشتن d و یک جمله‌ی دیگر بنویس.
- شناسایی در تست: وقتی تفاضل دو جمله از دنباله‌ی عددی رو دارید، یادِ این فرمول بیفتید!

**قانون اندیس‌ها:**

- حالت کلی: $m+n=r+s \Rightarrow t_m+t_n=t_r+t_s$
- حالت خاص: جمع اندیس‌ها مضربی از تعداد جمله‌هاست
  - $m+n=2r \Rightarrow t_m+t_n=2t_r$
  - $m+n+r=3s \Rightarrow t_m+t_n+t_r=3t_s$
- شناسایی در تست: وقتی جمع چند جمله از دنباله‌ی حسابی را دارید، یادِ این فرمول بیفتید!

**درج واسطه:** اگر بخواهی بین a و b دقیقاً m تا واسطه‌ی حسابی بذاری، آن‌وقت: $d=\frac{b-a}{m+1}$

## دنباله‌ی هندسی

**شناسایی:**

- حاصل تقسیم هر جمله بر جمله‌ی قبلیِ خودش، عددی ثابت است به نامِ r
- وضعیت r:
  - $r>1$: دنباله صعودی است.
  - $0<r<1$: دنباله نزولی است.
  - $r<0$: دنباله نه صعودی است، نه نزولی.

**وقتی سه جمله یک دنباله‌ی هندسی‌اند:**

- آن سه جمله داده شده‌اند ← واسطه‌ی هندسی
  - به زبان ریاضی: $a,b,c \xrightarrow{\text{دنباله‌ی هندسی}} b^2=ac$
  - به فارسی: مجذورِ وسطی مساوی ضربِ دو تای دیگر
- یک ویژگی از آن سه جمله داده شده است ← جمله‌ها را $ar, a, \frac{a}{r}$ بگیر و ویژگی را برایِ آن‌ها اعمال کن.

**جمله‌ی عمومی:**

- فرمول: $t_n=t_1r^{n-1}$
- داده شده است:
  - فرم: بر حسب n به‌صورت یک تابع با فرمِ نمایی است؛ $t_n=2^n\times 3$.
  - r: پایه‌ی n است به شرطی که ضریبِ n در توان ۱ باشد.
  - $t_1$: به جای n، بذار ۱.
  - r از راهی دیگر: به جای n یک‌بار بذارید ۱ و یک‌بار هم ۲. وقتی $t_1$ و $t_2$ درآمد، آن‌وقت: $r=\frac{t_2}{t_1}$

**فرمول دو جمله و شماره:** (وقتی دو جمله از دنباله را به همراهِ شماره‌ی آن‌ها دارید)

- فرمول: $\frac{t_m}{t_n}=r^{m-n}$
- کاربرد در تست:
  - وقتی نسبتِ دو جمله را دارید، یادِ این فرمول بیفتید.
  - پیدا کردنِ r با داشتن دو جمله از دنباله
  - نوشتن هر جمله‌ی دنباله با داشتنِ r و یک جمله‌ی دیگر از دنباله

**قانون اندیس‌ها:**

- حالت کلی: $m+n=r+s \Rightarrow t_mt_n=t_rt_s$
- حالت خاص: وقتی جمعِ اندیس‌ها مضربی از تعداد جمله‌هاست
  - $m+n=2k \Rightarrow t_mt_n=t_k^2$
  - $m+n+k=3s \Rightarrow t_mt_nt_k=t_s^3$
- شناسایی در تست: وقتی ضرب چند جمله از دنباله را دارید، یادِ این فرمول بیفتید!

**درج واسطه:** اگر بخواهی بین a و b، دقیقاً m تا واسطه‌ی هندسی بذاری: $r^{m+1}=\frac{b}{a}$

- توجه: اگر m فرد باشد، باید a و b هم علامت باشند و در این حالت برایِ r دو جواب قرینه داریم.



Scanned by CamScanner

هندسه تحلیلی

# فصل در یک نگاه

## دستگاه مختصات

- ناحیه‌ها
  - اول: $x, y > 0$
  - دوم: $x < 0, y > 0$
  - سوم: $x, y < 0$
  - چهارم: $x > 0, y < 0$
- محورهای مختصات
  - روی محور xها ← y صفر است.
  - روی محور yها ← x صفر است.
  - روی هر محوری باشی، متغیر دیگر صفر است.
- نیمسازهای نواحی
  - نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم
    - معادله: $\boxed{y = x}$
    - نقطه‌ی روی نیمساز: $\boxed{(a, a)}$
  - نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم
    - معادله: $\boxed{y = -x}$
    - نقطه‌ی روی نیمساز: $\boxed{(a, -a)}$

## فاصله‌ی...

- نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ تا $B(x_2, y_2)$: $\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$
- نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ تا مبدأ: $\boxed{OA = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$
- نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ تا $B(x_1, y_2)$ ← دونقطه‌ی هم‌طول ← $\boxed{AB = |y_2 - y_1|}$
- نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ تا $B(x_2, y_1)$ ← دونقطه‌ی هم‌عرض ← $\boxed{AB = |x_2 - x_1|}$

## مختصات نقطه‌های مهم

- وسطِ دو نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ ← نقطه M میانگین‌بگیر ← $\boxed{M = \frac{A+B}{2} = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})}$
- مرکز دایره: اگر A و B دو سرِ قطر دایره‌ای باشند؛ $\boxed{O = \frac{A+B}{2}}$ ← شعاع‌دایره ← $\boxed{r = \frac{AB}{2}}$
- متوازی‌الاضلاع: اگر ABCD، اسمِ متوازی‌الاضلاع شما باشد، آن‌وقت: $\boxed{A + C = B + D}$

## شیب خط

- پیدا کردنِ شیب خط از روی
  - معادله‌ی ضمنی: $ax + by + c = 0$ ← شیب ← $\boxed{-\frac{a}{b}}$
  - معادله‌ی صریح: $y = mx + h$ ← شیب ← $\boxed{m}$
  - با داشتن دو نقطه از خط: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ← شیب $x_1 \neq x_2$ ← $\boxed{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$
  - با داشتن p (طول از مبدأ) و q (عرض از مبدأ) ← شیب ← $\boxed{-\frac{q}{p}}$
- مفهوم
  - |شیب| زیاد شود یعنی خط به محور yها نزدیک‌تر می‌شود.
  - $\boxed{\tan\theta = m}$، θ زاویه‌ای است که خط با جهتِ + محور x ها می‌سازد.



Scanned by CamScanner

فصل ۳ هندسه تحلیلی



## خط

- **نوشتن معادله**
  - با داشتن شیب و یک نقطه: $A(x_1, y_1)$ و $m$ $\xrightarrow{\text{معادله}}$ $y - y_1 = m(x - x_1)$
  - با داشتن دو نقطه از خط: $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ $\xrightarrow[x_1 \neq x_2]{\text{معادله}}$ $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
  - با داشتن طول از مبدأ (p) و عرض از مبدأ (q) $\xrightarrow{\text{معادله}}$ $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$
    - نقطه برخورد خط با محور xها
    - نقطه برخورد خط با محور yها
    - $\xrightarrow{\text{مساحت مثلث}}$ $\frac{1}{2}|pq|$ حاصل با محورها
- **خط‌های خاص**
  - موازی محور yها (قائم)
    - معادله: $x = t$
    - شیب: $\infty$
  - موازی محور xها (افقی)
    - معادله: $y = k$
    - شیب: صفر
- **رسم خط:** دو نقطه از خط را پیدا کن (با عدد دادن به x یا y و محاسبه‌ی دیگری)، آن‌ها را در دستگاه مشخص کن و به هم وصل کن.

## حالت‌های دو خط نسبت به هم

- **معادله‌ی هر دو ضمنی است**
  $ax + by + c = 0$
  $a'x + b'y + c' = 0$
  - موازی با هم: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$
  - منطبق با هم: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
  - متقاطع با هم: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$
  - عمود بر هم: $aa' + bb' = 0$
- **معادله‌ی صریح هر دو داده شده است**
  $y = mx + h$
  $y = m'x + h'$
  - موازی با هم: $m = m'$
  - منطبق با هم: $m = m', h = h'$
  - متقاطع با هم: $m \neq m'$ $\xrightarrow{\text{زاویه‌ی دو خط متقاطع}}$ $\tan\theta = \left|\frac{m - m'}{1 + mm'}\right|$
  - عمود بر هم: $mm' = -1$ یا $m' = -\frac{1}{m}$
- **دو خطِ خاص**
  - اگر خطی با خطِ $x=t$
    - موازی باشد، آن‌وقت: $x = t'$ است.
    - عمود باشد، آن‌وقت: $y = k'$ است.
  - اگر خطی با خط $y=k$
    - موازی باشد، آن‌وقت: $y = k'$ است.
    - عمود باشد، آن‌وقت: $x = t'$ است.
  - $t$ و $t'$ و $k$ و $k'$ همگی عددثابت‌اند.
  - یه جوردیگه
    - خط موازی با خطِ افقی، افقی است و خط موازی با خط قائم هم حتماً قائم است.
    - خط عمود بر خط افقی، حتماً قائم است و برعکس.
- **تلاقی دو خط:** معادله‌ی دو خط را در یک دستگاه قرار بده و حل کن...
- **همرسی سه خط:** دو تا از خط‌ها را به دلخواه در دستگاه قرار بده و حل کن، در آخر نقطه‌ی حاصل را در معادله‌ی خطِ سوم، قرار بده...



Scanned by CamScanner

"هندسه تحلیلی"

## نوشتن اجزاء فرعی مثلث

**ارتفاع** (با شیب و نقطه نوشته می‌شود.)

- شیب: شیبِ ارتفاع، عکس و قرینه‌ی شیب ضلعی است که بر آن وارد می‌شود؛ $m_{AH} = -\frac{1}{m_{BC}}$
- نقطه: نقطه‌ای که ارتفاع از آن می‌گذرد، رأسی است که ارتفاع از آنجا کشیده شده.

**میانه** (با دو نقطه نوشته می‌شود.)

- نقطه‌ی اول: رأسی از مثلث است که میانه از آنجا کشیده شده.
- نقطه‌ی دوم: وسطِ ضلعی است که میانه به آنجا وارد می‌شود؛ مثلاً در میانه‌ی نظیر BC، وسطِ C و B .

**عمودمنصف** (با شیب و نقطه نوشته می‌شود.)

- شیب: عکس و قرینه‌ی شیبِ ضلعی است که عمودمنصف بر آن وارد می‌شود، درست مثل ارتفاع.
- نقطه: وسطِ ضلعی که عمودمنصفِ آن کشیده شده.

## فاصله‌ی...

- نقطه از خط: $ax+by+c=0, A(x_0,y_0)$ $\xrightarrow{\text{خط را ضمنی کن}}$ $\xrightarrow{\text{فرمول فاصله}}$ $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- دو خطِ موازی: $ax+by+c'=0, ax+by+c=0$ $\xrightarrow[\text{ضریب x و y را هم یکی کن}]{\text{هر دو را ضمنی کن}}$ $\xrightarrow{\text{فرمول فاصله}}$ $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- خاص‌ها:
  - مبدأ تا خطِ ضمنی $ax+by+c=0$: $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
  - نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ تا خطِ افقی $y=k$: $|y_0-k|$
  - نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ تا خطِ قائم $x=t$: $|x_0-t|$
  - نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ تا
    - محور xها: $|y_0|$
    - محور yها: $|x_0|$
- اندازه‌ی ارتفاع AH در مثلث ABC: معادله‌ی BC را بنویس و فاصله‌ی A را تا آن حساب کن...

Scanned by CamScanner

فصل ۴ «معادله و تابع درجه ۲»



# فصل در یک نگاه

- تجزیه: وقتی ضریب $x^2$، مساوی ۱ بوده و ریشه‌ها صحیح باشند: $x^2+mx+n=0 \Rightarrow (x+\square)(x+\square)=0$ (جمعشان m، ضربشان n)
- مربع کامل: اول از ضریب $x^2$ فاکتور بگیر و بعد عبارت درجه‌ی دوم رو مربع کامل کن...

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow a(x^2+\frac{b}{a}x)+c=0 \Rightarrow a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}]+c=0$$

(نصف کن — به‌توان ۲)

$\Rightarrow a(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a}-c \rightarrow$ حل کن

## روش‌های حل معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$

- روش $\Delta$: $\Delta=b^2-4ac$
  - ریشه‌ها:
    - $\Delta>0$: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
    - $\Delta=0$: $x=\frac{-b}{2a}$
  - تعداد ریشه‌ها:
    - $\Delta>0$: دو ریشه‌ی حقیقی دارد.
    - $\Delta=0$: یک ریشه‌ی مضاعف دارد.
    - $\Delta<0$: ریشه‌ی حقیقی ندارد.
- حالت‌های خاص
  - جمع ضرایب، مساوی صفر بشود $a+c+b=0 \rightarrow$ ریشه‌ها: ۱ و $\frac{c}{a}$
  - ضریب اولی + ضریب آخری = ضریب وسطی $a+c=b \rightarrow$ ریشه‌ها: ۱- و $-\frac{c}{a}$
  - عدد ثابت ندارد $ax^2+bx=0 \Rightarrow x(ax+b)=0$ (فاکتورگیر) ریشه‌ها: ۰ و $-\frac{b}{a}$
- مختصاتِ رأس
  - $-\frac{b}{2a}$
  - $-\frac{\Delta}{4a}$
- تلاقی با محورxها
  - $\Delta>0$ ← در دو نقطه محور را قطع می‌کند.
  - $\Delta<0$ (هیچ‌نقطه‌ی برخورد)
    - $a>0$ ← قطع نمی‌کند: همواره بالای محور
    - $a<0$ ← قطع نمی‌کند: همواره پایین محور
  - $\Delta=0$ (یک‌نقطه‌ی برخورد)
    - $a>0$ ← مماس است و بالای محور
    - $a<0$ ← مماس است و پایین محور
- علامتِ a
  - $a>0$ ← سهمی رو به بالا است:
  - $a<0$ ← سهمی رو به پایین است:

## سهمی $y=ax^2+bx+c$

- محور تقارن
  - معادله: $x=-\frac{b}{2a}$
  - تعداد: یکی
  - ویژگی: گذرنده از رأس سهمی
- مماس بر
  - محورxها: یعنی $\Delta=0$ بوده.
  - خطِ افقی $y=k$: یعنی $-\frac{\Delta}{4a}=k$ بوده.
  - خطِ کلی $y=mx+h$: دو ضابطه را برابرِ هم قرار دهید، یعنی $ax^2+bx+c=mx+h$ و معادله‌ی حاصل را ساده کنید و $\Delta$ی آن را برابرِ صفر بگذارید.
- تلاقی با محور yها
  - تعداد ← همواره یکی
  - مختصات: $(0,c)$



Scanned by CamScanner

## SgP

- مقدار و مفهوم
  - $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$
  - $P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$ ← اگر منفی باشد ← حتماً معادله، دو ریشه‌ی حقیقی دارد.
- فهمیدن علامت ریشه‌ها
  - $P > 0$ ← دو ریشه‌ی هم علامت دارد
    - $S > 0$ ← ریشه‌ها مثبت‌اند.
    - $S < 0$ ← ریشه‌ها منفی‌اند.
  - $P < 0$ ← حتماً دو ریشه‌ی غیرهم‌علامت دارد
    - $S > 0$ ← قدرمطلقِ ریشه‌ی مثبت بزرگ‌تره: ۲,۴-
    - $S < 0$ ← قدرمطلقِ ریشه‌ی منفی بزرگ‌تره: ۳-,۱
- نوشتنِ معادله با داشتنِ S و P: $x^2 - Sx + P = 0$

## روابط بین ریشه‌ها

- قرار است رابطه‌ای بین ریشه‌ها پیدا کنی
  - رابطه‌های معروف
    - $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$
    - $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3SP$
    - $|\alpha - \beta| = \sqrt{S^2 - 4P} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$
    - $\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} = \sqrt{S \pm 2\sqrt{P}}$ با شرط $\alpha, \beta > 0$
  - رابطه‌های غیر معروف: عبارت داده‌شده را با مخرج مشترک‌گیری و... ساده کن تا به عبارت‌های معروف برسد...
- رابطه‌ای بین ریشه‌ها داده شده است
  - حالت کلی: S و P رو بر حسبِ α و β بنویس و مقدارشون رو هم پیدا کن، بعد هم رابطه‌ی داده شده رو بر حسب α و β بنویس، حالا همه‌ی این‌ها رو با هم دستگاه کن...
  - حالت‌های خاص
    - یکی از ریشه‌ها k برابر دیگری است ← $\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$
    - یکی از ریشه‌ها، k واحد از دیگری بزرگ‌تر است ← $\Delta = k^2a^2$
- اخطار جدی ← در همه‌ی تست‌هایِ S و P، بعد از پیدا کردن جواب، یادتان باشد Δ را کنترل کنید! اگر به ازای هر پارامتری $\Delta < 0$ شود، یعنی ریشه نداشته‌اید و حرف درباره‌ی S و P غلط است!

## معادله‌های ساده

- درجه‌ی اول
  - فرم کلی: $ax + b = 0$ , $a \neq 0$
  - جواب: $x = -\frac{b}{a}$
  - تعیین علامت:

| x | | $-\frac{b}{a}$ | |
|---|---|---|---|
| ax+b | مخالف علامت a | 0 | موافق علامت a |

- درجه‌ی دوم
  - فرم کلی: $ax^2 + bx + c = 0$ , $a \neq 0$
  - جواب: تجزیه کن یا روش Δ ← $\Delta \geq 0$ ← $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
  - تعیین علامت
    - $\Delta > 0$:

| x | | $x_1$ | | $x_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $ax^2+bx+c$ | موافق علامت a | 0 | مخالف علامت a | 0 | موافق علامت a |

    - $\Delta = 0$:

| x | | $-\frac{b}{2a}$ | |
|---|---|---|---|
| $ax^2+bx+c$ | موافق علامت a | 0 | موافق علامت a |

    - $\Delta < 0$: همواره موافق علامتِ a بوده و هیچ‌گاه هم صفر نمی‌شود.
- $x^2 = k$
  - $k > 0$ ← دو ریشه‌ی حقیقی دارد: $x_{1,2} = \pm\sqrt{k}$ ؛ مثل $x^2 = 4$.
  - $k = 0$ ← یک ریشه‌ی مضاعفِ صفر دارد.
  - $k < 0$ ← ریشه ندارد؛ مثل $x^2 = -3$.
  - حالت کلی‌تر ← اگر $u^2 = k$ و u عبارتی بر حسبِ x باشد هم، بررسی ریشه‌ها همین‌گونه است؛ مثل $(2x+1)^2 = 9$.
- جمعِ چندجمله‌ی غیرمنفی، مساوی صفر شده است ← هر کدام را تک تک، مساوی صفر بذار. بسته به توان زوج، رادیکال فرجه‌ی زوج و قدرمطلق، عبارت‌های غیرمنفی هستند:
  $(\bigcirc)^{\text{زوج}}$ , $\sqrt[\text{زوج}]{\bigcirc}$ , $|\bigcirc|$.
- که با تغییر متغیر حل می‌شوند
  - حالت کلی: عبارتی در معادله، مشترک است ← آن را A بگیر.
  - حالت‌های خاص
    - $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ ← $x^n = A$ بگیر ← $aA^2 + bA + c = 0$
    - $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ ← $\sqrt{x} = A$ بگیر ← $aA^2 + bA + c = 0$



Scanned by CamScanner

# فصل در یک نگاه

## معادله‌های گویا و گنگ

### معادله‌ی گویا

- مفهوم: x در مخرج داریم ← معادله کسری است.
- روش کلی حل: همه‌ی جمله‌ها رو بیار یک طرف تساوی، بعدش مخرج مشترک بگیر و صورت کسر رو مساویِ صفر بذار...
- میان‌بُر: گاهی به یک تناسب می‌رسیم که با طرفین وسطین، حلش می‌کنیم.
- بررسی: حتماً باید xهای به‌دست آمده در دامنه باشند $\xrightarrow{\text{یه‌جوردیگه}}$ مخرجِ هیچ کسری را صفر نکنند!
- ساده کردن یک عامل:
  - از صورت و مخرج یک کسر ← اشکال ندارد و ریشه‌ی عامل هم، قابل قبول نیست.
  - از صورت دو کسر مختلف در دو طرفِ تساوی ← اشکال ندارد و ریشه‌ی عامل هم قبول است.
  - از مخرج دو کسر مختلف در دو طرف تساوی ← اشکال ندارد و ریشه‌ی عامل هم قبول نیست.
- نسبت طلایی:
  - فرم معادله‌ای: $\boxed{x^2 = x+1}$ ، $\boxed{\frac{x+1}{x} = x}$
  - مقدار نسبت: $\boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$
  - مقدار تقریبی: $\boxed{1/618}$

### معادله‌ی گنگ

- مفهوم: x در زیر رادیکال داریم ← معادله رادیکال‌دار است.
- روش کلی حل: رادیکال رو یک طرفِ تساوی نگه دار و بقیه رو به سمت دیگه منتقل کن.حالا دو طرف رو به توان برسان (به توانِ فرجه) تا رادیکال حذف شود. بعدش معادله‌ی معمولی رو حل کن.
- بررسی: xهای به‌دست آمده باید عبارتِ زیر و مقابل هیچ رادیکالِ فرجه‌ی زوجی را منفی نکنند. $\xrightarrow{\text{یه‌جوردیگه}}$ xهای به‌دست آمده باید درمعادله‌ی اصلی، قبل از توان رساندن، صدق کرده و مشکلی ایجاد نکنند.
- چندرادیکالی‌ها: هر بار باید رادیکال رو تنها کنی و به توان برسانی تا هیچ رادیکالی باقی نماند! آخرش هم بررسی!

## نامعادله

### درجه‌ی اول

- فرم کلی: $\boxed{ax+b \geq 0}$ یا $\boxed{ax+b \leq 0}$ یا $\boxed{ax+b > 0}$ یا $\boxed{ax+b < 0}$
- روش حل: عدد ثابت را به سمتِ دیگر منتقل کن. بعد هم دو طرف را بر ضریبِ x تقسیم کن.
  - $0 <$ ضریبِ x ← جهت حفظ می‌شود!
  - $0 >$ ضریبِ x ← جهت تغییر می‌کند!

### درجه‌ی دوم

- فرم کلی: $\boxed{ax^2+bx+c \geq 0}$ یا $\boxed{ax^2+bx+c > 0}$ یا $\boxed{ax^2+bx+c \leq 0}$ یا $\boxed{ax^2+bx+c < 0}$
- روش حل: وقتی همه‌ی جمله‌ها را آوردی یک طرفِ نامساوی، عبارت درجه‌ی دوم حاصل را تعیین علامت کن و محدوده‌ی قابل قبول را اعلام کن $\xrightarrow{\text{یه‌جوردیگه}}$ (همه‌ی جمله‌ها بیان یک طرف ← ریشه‌ها را پیدا کن ← جدول تعیین علامت ← محدوده)
- همواره یک علامت دارد:
  - $\boxed{ax^2+bx+c > 0} \leftarrow \boxed{a > 0, \Delta < 0}$
  - $\boxed{ax^2+bx+c < 0} \leftarrow \boxed{a < 0, \Delta < 0}$
  - $\boxed{ax^2+bx+c \geq 0} \leftarrow \boxed{a > 0, \Delta \leq 0}$
  - $\boxed{ax^2+bx+c \leq 0} \leftarrow \boxed{a < 0, \Delta \leq 0}$

### در حالت کلی

همه‌ی جمله‌ها را باید بیاورید یک طرف نامساوی. بعد هم عبارتِ حاصل را تعیین علامت کنید، آخر هم محدوده‌ی قابل قبول را پیدا کنید.

① موقع تعیین علامت، به بسته‌های توان زوج، رادیکال‌های فرجه‌ی زوج و قدرمطلق‌ها کاری نداشته باشید، این‌ها صفر می‌شوند؛ ولی منفی نه!

### قدرمطلق‌دارها

- $\boxed{|u| \geq k} \xrightarrow{k>0} \boxed{u \geq k \text{ یا } u \leq -k}$
- $\boxed{|u| \leq k} \xrightarrow{k>0} \boxed{-k \leq u \leq k}$

علامتِ مساوی‌ها، همه با هم هستند یا همه با هم نیستند!



Scanned by CamScanner

## نامساوی‌ها

- عدد ثابتی را به دو طرفِ نامساوی
  - جمع و منها کنیم ← ایرادی ندارد.
  - ضرب و تقسیم کنیم
    - مثبت باشد ← ایرادی ندارد.
    - منفی باشد ← جهت عوض می‌شود.
- دو طرف نامساوی را
  - به توان یا فرجه‌ی فرد برسانیم ← ایرادی ندارد: $a<b \Rightarrow a^{3}<b^{3}$ ، $a<b \Rightarrow \sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b}$
  - به توان زوج برسانیم
    - هر دو مثبت باشد ← جهت حفظ می‌شود: $0<a<b \Rightarrow a^{2}<b^{2}$
    - هر دو منفی باشد ← جهت تغییر می‌کند: $a<b<0 \Rightarrow a^{2}>b^{2}$
  - فرجه‌ی زوج بگیریم (هر دو مثبت باشد) ← ایرادی ندارد، فقط برای دو عددِ حاصل قدرمطلق بذار...
  - معکوس کنیم
    - هر دو مثبت‌اند / هر دو منفی‌اند ← جهت عوض می‌شود.
    - یکی مثبت و یکی منفی است. ← جهت حفظ می‌شود.
- نامساوی دوگانه را قدرمطلقی کنیم: $x<a$ یا $x>b$ یا $a<x<b$
  - میانگینِ a و b را از سه طرفِ نامساوی کم کنید...
  - فرمولی
    - $a \le x \le b \Rightarrow |x-\frac{a+b}{2}| \le \frac{b-a}{2}$
    - $x \ge b$ یا $x \le a \Rightarrow |x-\frac{a+b}{2}| \ge \frac{b-a}{2}$



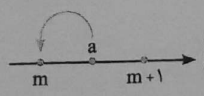
Scanned by CamScanner

# فصل در یک نگاه

## تابع $f: A \to B$

- **مدل‌های نمایش**
  - با بیانِ فارسی — بررسی تابع بودن در تست ← هیچ عضوِ اولی نباید به دو تا عضو از مجموعه‌ی دوم نسبت داده شود!
  - با زوج مرتب — بررسی تابع بودن در تست ← اگر دو زوج، مؤلفه‌ی اولِ تکراری دارند، مؤلفه‌ی دومشان را مساوی هم بذار...
  - با نمودار پیکانی — بررسی تابع بودن ← از هر عضوِ اولی، دقیقاً یک فلش خارج شده باشد.
  - با نمودار مختصاتی — بررسی تابع بودن ← هیچ دو نقطه‌ای زیر هم نداشته باشد.
  - با نمودار تابع — بررسی تابع بودن ← هر خط موازی محور $x$ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.
- **ضابطه‌ی تابع**
  - **بررسی تابع بودن**
    - اثبات در حالت کلی: ضابطه‌ی داده شده را یک بار برای $x$ و $y_1$ و بار دیگر برای $x$ و $y_2$ می‌نویسیم و از این دو تا باید بتوانیم نتیجه بگیریم $y_1 = y_2$ ، وگرنه تابع نیست...
    - نشان دادن تابع نبودن — بهترین راه ← مثال نقض: ارائه‌ی یک $x$ که موجب به دست آمدنِ چندین $y$ شود!
    - کاندیداهای تابع نبودن ← وقتی $y$ در ضابطه‌ی داده شده
      - براکت دارد.
      - قدرمطلق دارد.
      - توان زوج دارد.
      - درگیر تابع‌های مثلثاتی است.
  - **کار با ضابطه**
    - $(a,b) \in f$ یعنی
      - $f(a) = b$
      - نقطه‌ی $(a,b)$ روی نمودار تابع است.
    - $f(x) = \square$ داده شده و $f(\alpha)$ خواسته شده ← در تابع به جایِ تمامِ $x$ها بگذارید $\alpha$.
  - **برخورد تابع**
    - با محور $x$ها ← تابع را مساویِ صفر بذار — حالت خاص ← اگر کسری است، فقط صورتش مساوی صفر باشد.
    - با محور $y$ها ← به جایِ تمام $x$ها بذار صفر.
    - با تابعِ دیگر ← ضابطه‌ها را مساویِ هم بذار و معادله حل کن.

      $f(x) = g(x)$ ↓ برخورد تابع $f$ با $g$
- **جزء صحیح** — $y = [x]$ — حاصل این تابع همواره عدد صحیح است.
  - پیدا کردنِ جزء صحیحِ عددِ $a$
    - $a \in \mathbb{Z} \to [a] = a$
    - $a \notin \mathbb{Z} \to [a]$ می‌شود اولین عدد صحیحِ قبلِ $a$.
    - حالت کلی: $m \le a < m+1 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} [a] = m$




  - ویژگی‌ها
    - حاصلِ براکت را داریم
      - $[u] = k \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \le u < k+1$
      - $[u] = t \xrightarrow{t \notin \mathbb{Z}}$ امکان ندارد
    - عدد منهای جزء صحیح خودش: $0 \le u - [u] < 1$ : صفر شدن یعنی $u \in \mathbb{Z}$.
    - خارج شدن عدد صحیح از براکت: $[x+n] = [x] + n$ : $n \in \mathbb{Z}$
  - رسم: برای $y = [ax]$ و $a > 0$ از مبدأ با نقطه‌ی پُر شروع کن و یک نیم خط به طول $\frac{1}{a}$ به سمت راست بکش که اون سرش بازه، بعد یک واحد برو بالا و تکرار همین قضیه... برای $a < 0$ فقط سمتِ حرکت می‌شه چپ...

## انواع تابع

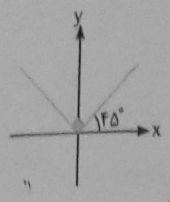
- چند جمله‌ای: $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots$ که $n \in \mathbb{N}$ و ضرایب عددهای حقیقی‌اند.
- ثابت: $f(x) = c$ ؛ هر چی بهش می‌دی، خروجی‌اش عددِ ثابتِ $c$ است — نمودار ← خطی موازی محور $x$ها
- همانی: $f(x) = x$ ؛ هر چی بهش می‌دی، خروجی‌اش همان عدد است — نمودار ← نیمساز ربع اول و سوم
- خطی: $f(x) = ax + b$ ؛عبارتی درجه اول بر حسب $x$ است — نمودار ← یک خطِ راست



Scanned by CamScanner

فصل ۶ - تابع

- **قدرمطلق:** $f(x)=|u|$
  - ضابطه: $|u|=\begin{cases} u & u\geq 0 \\ -u & u<0 \end{cases}$
  - شکل: $y=|x|$ می‌شود




  - مفهوم: حاصلِ قدرمطلق همواره نامنفی است.

- **قطعه‌ای** (فرم):

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & , \\ h(x) & , \end{cases}$$

محدوده‌ی x

  - بررسی تابع بودن: اگر x مشترکی در محدوده‌ها هست باید به ازای هر ضابطه، خروجیِ یکسان داشته باشد.
  - یافتن مقدار: برای یافتن $f(\alpha)$، باید اول ببینی $\alpha$ در کدام محدوده صدق می‌کند، در هر کدام که بود $\alpha$ را به آن ضابطه بدهید...

- **فرمول‌ها**
  - مربع به ضلع a
    - محیط $4a$
    - مساحت $a^2$
  - دایره به شعاع r
    - محیط $2\pi r$
    - مساحت $\pi r^2$
  - کره به شعاع r (حجم) $\frac{4}{3}\pi r^3$
  - مجموع زوایای n ضلعی محدب: $(n-2)180^\circ$

## دامنه‌ی تابع D

- مفهوم: مجموعه‌ی تمام x هایی که تابع می‌تواند آن‌ها را قبول کند و به ازایِ آن‌ها یک y حقیقی تحویل دهد.
- پیدا کردن دامنه از روی مدل‌های مختلف نمایش تابع: نمایش با
  - زوج مرتب: همه‌ی مؤلفه‌هایِ اولِ زوج مرتب‌ها را بریز در یک مجموعه...
  - پیکانی: همه‌ی عضوهای موجود در دایره‌ی اول را بریز در یک مجموعه...
  - نمودار مختصاتی: همه‌ی طول نقطه‌های موجود را بریز در یک مجموعه...
  - نمودار تابع: شکل تابع را روی محور xها تصویر کن و بازه‌ی حاصل را اعلام کن...
- پیدا کردن دامنه از روی ضابطه‌ی تابع
  - تابع کسری: مخرج نباید صفر شود
    - $\frac{\quad}{u} \xrightarrow{\text{دامنه}} \mathbb{R}-\{x\,|\,u=0\}$
    - مثلثاتی‌ها
      - $\tan u \xrightarrow{\text{دامنه}} u\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$
      - $\cot u \xrightarrow{\text{دامنه}} u\neq k\pi$
    - اخطار: برای یافتن دامنه، هیچ کسری را ساده نکنید، تغییر هم ندهید!
  - تابع رادیکالی
    - فرجه فرد است ← محدودیتی ندارد، اگر هر مشکلی هست مالِ زیر رادیکاله!
    - فرجه زوج است ← $\sqrt[\text{زوج}]{u} \xrightarrow{\text{دامنه}} u\geq 0$
  - چندضابطه‌ای: $y=\begin{cases} g(x) & , A \\ h(x) & , B \end{cases} \xrightarrow{\text{دامنه}} (D_g\cap A)\cup(D_h\cap B)$
  - لگاریتمی: $y=\log_B A \xrightarrow{\text{دامنه}} A,B>0,B\neq 1$

## دامنه‌ی محدود شده توسط گفته‌ی تست

- تابع کسری
  - اگر گفت دامنه $\mathbb{R}$ است ← $\Delta<0$ مخرج
  - اگر گفت دامنه فقط یک عضو به نامِ k را ندارد
    - $\Delta=0$ مخرج
    - $x=k$، مخرج کسر را صفر می‌کند.
  - اگر گفت دامنه فقط دو عضوِ $\alpha$ و $\beta$ را ندارد. ← $x=\alpha$ و $x=\beta$ مخرج کسر را صفر می‌کنند.
- اگر گفت رادیکالیِ فرجه‌ی زوج: دامنه $\mathbb{R}$ است
  - عبارت زیر رادیکال همواره مثبت است.
  - حالت خاص: $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ ، $D=\mathbb{R}$ ← $\Delta\leq 0$ ، $a>0$

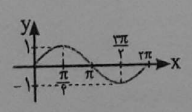
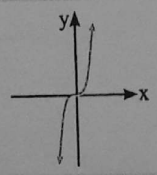
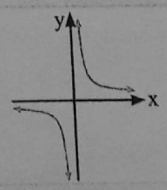
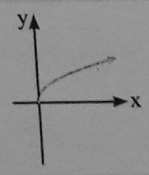
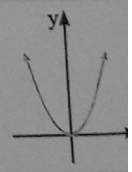
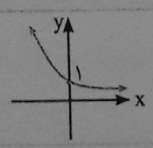
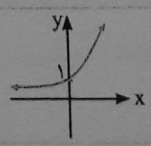
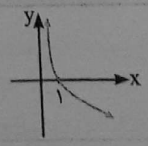
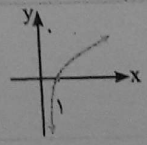
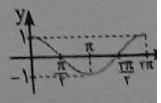


Scanned by CamScanner

## بُرد تابع $R$

- مفهوم: مجموعه‌ی تمامیِ $y$هایی است که از $x$های ورودی تابع، دریافت کرده‌ایم.
- پیدا کردن برد از روی مدل‌های مختلف نمایش تابع
  - زوج مرتب: همه‌ی مؤلفه‌های دومِ زوج مرتب‌ها را بریز در یک مجموعه...
  - پیکانی: همه‌ی عضوهای موجود در دایره‌ی دوم را بریز در یک مجموعه...
  - نمودار مختصاتی: همه‌ی عرض‌های نقطه‌های موجود را بریز در یک مجموعه...
  - نمودار تابع: شکل تابع را روی محور $y$ها تصویر کن و بازه‌ی حاصل را اعلام کن.
- بُرد تابع از روی ضابطه
  - تابع چندجمله‌ای
    - درجه فرد: بُردش $\mathbb{R}$ است.
    - درجه دو: $y = ax^2 + bx + c$
      - $a > 0$ است. $R = [-\frac{\Delta}{4a}, +\infty)$
      - $a < 0$ است. $R = (-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$
  - عبارتِ مثبتِ کنار عددِ $a$
    - عبارت‌های مثبت: $|u|$ و $u^{2n}$ و $\sqrt[2n]{u}$
    - عبارتِ مثبت، ضریب مثبت دارد: $a+$(عبارت مثبت) $\rightarrow R = [a, +\infty)$
    - عبارتِ مثبت، ضریب منفی دارد: $a-$(عبارت مثبت) $\rightarrow R = (-\infty, a]$
  - تابع هموگرافیک
    - ضابطه: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$
    - شرط: $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$
    - بُرد: $R = \mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$
  - معروف‌ها
    - مثلثاتی‌ها
      - سینوس و کسینوس: $R = [-1, 1]$
      - تانژانت و کتانژانت: $R = \mathbb{R}$
    - نمایی $y = a^x$: $R = \mathbb{R}^+$
    - لگاریتمی $y = \log_a x$: $R = \mathbb{R}$
  - نیم خط: بُرد $y = ax + b$ با شرطِ
    - $x > k$
      - $a > 0$: $(ak+b, +\infty)$
      - $a < 0$: $(-\infty, ak+b)$
    - $x < k$
      - $a > 0$: $(-\infty, ak+b)$
      - $a < 0$: $(ak+b, +\infty)$

## شکل تابع‌های معروف

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $y = \sin x$ در $[0, 2\pi]$ | $y = x^3$ | $y = \frac{1}{x}$ | $y = \sqrt{x}$ | $y = x^2$ |
|  |  |  |  |  |
| $y = b^x$ | $y = a^x$ | $y = \log_b x$ | $y = \log_a x$ | $y = \cos x$ |
| $0 < b < 1$ | $a > 1$ | $0 < b < 1$ | $a > 1$ | در $[0, 2\pi]$ |
|  |  |  |  |  |



Scanned by CamScanner

ریاضی ۶ ـ تابع

## انتقال و کشش

- $f(x)+a$
  - $a>0$: $f(x)$ را $a$ واحد بیر بالا.
  - $a<0$: $f(x)$ را $a$ واحد بیار پایین.
- $f(x+a)$
  - $a>0$: $f(x)$ را $a$ واحد به سمت چپ منتقل کن.
  - $a<0$: $f(x)$ را $a$ واحد به سمت راست منتقل کن.
- $kf(x)$ ← $k>0$: بدون هیچ تغییری در xها، $f(x)$ را از بالا و پایین بکش یا فشرده کن تا بُرد آن k برابر شود.
- $-f(x)$: $f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کن.
- $|f(x)|$
  - قسمت‌های بالایی $f(x)$ نسبت به محور xها: سرِ جای خود می‌مانند.
  - قسمت‌های پایینی $f(x)$ نسبت به محور xها: نسبت به محور xها قرینه کن.
- $f(kx)$
  - $k>0$: هر نقطه‌ای روی $y=f(x)$، از $(a,b)$ می‌شود $(\frac{a}{k},b)$
    - $k>1$: انقباضِ $y=f(x)$ در راستای محور xها
    - $0<k<1$: انبساطِ $y=f(x)$ در راستای محور xها
  - $k<0$: در حالت $k>0$ رسم کن، آخر سر نقارن نسبت به محور yها بده.
  - طول نقطه‌ها همگی در $\frac{1}{k}$ ضرب می‌شود.
- $f(|x|)$: هر بخشی از $y=f(x)$ که سمت چپ محور yهاست حذف کن و سمت راستِ تابع و قرینه‌ی آن نسبت به محور yها را به عنوان جواب اعلام کن.

## تابع یک به یک

- تشخیص با مدل‌های مختلف نمایش تابع
  - زوج مرتب: در زوج‌های متفاوت، نه مؤلفه‌ی اولِ تکراری داشته باشیم و نه مؤلفه‌ی دومِ تکراری!
  - پیکانی:
    - از هر عضو دایره‌ی اول، دقیقاً یک فلش خارج شود.
    - به هر عضو دایره‌ی دوم، دقیقاً یک فلش وارد شود.
  - نمودار مختصاتی:
    - هیچ دو نقطه‌ای زیر هم نداشته باشیم.
    - هیچ دو نقطه‌ای روبه‌روی هم نداشته باشیم.
    - نقطه‌های هم طول و هم عرض ممنوع است!
  - نمودار تابع:
    - هر خط موازی محور xها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.
    - هر خط موازی محور yها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.
- روش کلیِ اثبات: ضابطه‌ی داده‌شده را یک بار برای $x_1$ و $y$ می‌نویسیم و یک بار هم برای $x_2$ و $y$ و از این دو رابطه سعی می‌کنیم نتیجه بگیریم $x_1=x_2$. اگر تنها نتیجه این نباشد، یعنی تابع یک‌به‌یک نیست.
- شناخت
  - تابع‌های یک به یک
    - نمایی و لگاریتمی: $y=\log_c(ax+b)$ و $y=a^{mx+n}$
    - رادیکالی: $y=\sqrt{ax+b}$ و $y=\sqrt[3]{ax+b}$
    - هموگرافیک: $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$.
  - تابع‌های غیر یک به یک
    - مثلثاتی‌ها: همه‌شون یک‌به‌یک نیستند!
    - چندجمله‌ای درجه ۲ $y=ax^2+bx+c$ مگر بازه بدهند ← بزرگ‌ترین بازه: $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ یا $[-\frac{b}{2a},+\infty)$
    - قدرمطلقی: $y=|ax+b|$ مگر بازه بدهند ← بزرگ‌ترین بازه: $(-\infty,-\frac{b}{a}]$ یا $[-\frac{b}{a},+\infty)$
    - براکتی: $y=[ax+b]$
- روش هندسی: تابع را رسم کن و از روی نمودار، یک‌به‌یک بودن یا نبودنش را تعیین کن!
- یک‌به‌یک کردنِ تابع غیر یک‌به‌یک: کافی است محدوده‌ای از دامنه‌ی $f(x)$ را در نظر بگیرید که تابع در آن محدوده یک‌به‌یک و بعد هم وارون‌پذیر گردد.



Scanned by CamScanner

**مفهوم**

- وارون تابع: جایِ x و yها را عوض کنی...
- تابعِ وارون: اگر وارونِ تابع، خودش تابع باشد، به آن تابع وارون می‌گوییم ← (جوردیگه) اگر f وارون‌پذیر باشد، تابع وارون دارد.

**وارون از روی مُدل‌ها**

- زوج مرتب: جای تمامِ مؤلفه‌های اول و دوم را با هم عوض کن. ← (نتیجه) $R_f = D_{f^{-1}}$ و $D_f = R_{f^{-1}}$
- پیکانی: جهتِ تمامِ فلش‌ها را برعکس کن.
- نمودار مختصاتی: جایِ طول و عرضِ همه‌ی نقطه‌های موجود را عوض کن و نقطه‌های جدیدِ حاصل را پررنگ کن!
- نمودار تابع: شکل تابع را نسبت به خط $y = x$، قرینه کن...

**شرط یک‌به‌یک بودن:** f باید یک‌به‌یک باشد ← (جوردیگه)
- نه x تکراری داشته باشیم و نه y تکراری!
- هر خط موازی محور xها و yها نمودار تابع را در حداکثر یک نقطه قطع کند.

**پیدا کردن ضابطه‌ی وارون** $y = f(x)$

- مرحله‌ی ۱: جایِ x و y را عوض کنید.
- مرحله‌ی ۲: y را بر حسبِ x پیدا کنید ← (نتیجه) y را تنها کن و معادله حل کن تا y دربیاد...
- مرحله‌ی ۳: در معادله‌ی آخر، به جای y بذار $f^{-1}(x)$.
- مرحله‌ی ۴: اگر برد f محدود است، بازه‌ی برد f را کنار ضابطه‌ی $f^{-1}$ بذار.

## وارون تابع

**معروف‌ها**

- تابع خطی: $y = ax + b$ ← (وارون) $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$
- تابع هموگرافیک: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ← (وارون) $f^{-1}(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}$ ، $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$
- دو خط وارون هم: اگر $ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$ وارونِ هم باشند، آن‌وقت: $\frac{a}{b'} = \frac{b}{a'} = \frac{c}{c'}$.
- تابع خطی زیر رادیکال: $y = k \pm \sqrt{ax+b}$
  - ضریب رادیکال مثبت است: $x \geq k$
  - ضریب رادیکال منفی است: $x \leq k$
  - ← $f^{-1}(x) = \frac{(x-k)^2 - b}{a}$
- تابع درجه دو: $y = ax^2 + bx + c$
  - $a = 1$ ← $y = x^2 + mx + n$
    - $x \geq -\frac{m}{2}$ ← (وارون) $f^{-1}(x) = \frac{-m+\sqrt{\Delta+4x}}{2}$
    - $x \leq -\frac{m}{2}$ ← (وارون) $f^{-1}(x) = \frac{-m-\sqrt{\Delta+4x}}{2}$
  - $a \neq 1$ ← a را از کل عبارت فاکتور بگیر و با فرمول بالا وارون پیدا کن، آخر سر به جای x، بذار $\frac{x}{a}$.

**روش تستی**

- $f^{-1}(\alpha)$ خواسته شده: گزینه‌ای درست است که اگر آن را در $f(x)$ بگذاریم، بدهد $\alpha$.
- ضابطه‌ی $f^{-1}(x)$ خواسته شده ← به x در $f(x)$ عددی دلخواه بدهید تا $\beta$ حاصل شود. حالا گزینه‌ای درست است که به ازای $\beta$ به شما همان x دلخواه اولیه را بدهد.

از روی $f(x)$...



Scanned by CamScanner

فصل ۶ - تابع



## تابع

- دامنه و برد: $D = R = R$
- شکل تابع: یک خطی که روی محور x ها در مبدأ نشسته است.
  - نمودار منحنی، نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.
- ویژگی‌های تابع
  - یک‌به‌یک است.
  - وارون‌پذیر است.
  - صعودی اکید است.

مثال $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

- هم‌خانواده‌ها
  - $y = ax^3 + b$
    - $a > 0$ شکل تقریبی

    - $a < 0$ شکل تقریبی

    - مثال $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-b}{a}}$
  - $y = (ax+b)^3$
    - $a > 0$ شکل تقریبی

    - $a < 0$ شکل تقریبی

    - مثال $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-b}{a}$
- ارتباط با $x^2$ — هر دو که از مبدأ شروع می‌شوند. $x^2$ از زیر $x^2$ حرکت می‌کند تا نقطه‌ای به طول ۱ که به هم برخورد می‌کنند. بعد $x^2$ می‌رود بالای $x^2$.

## عملیات جبری روی توابع

- تأثیر بر ضابطه
  - $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
  - $(f.g)(x) = f(x)g(x)$
  - $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
  - $(kf)(x) = kf(x)$
- تأثیر بر دامنه (تابع ترکیبی)
  - جمع و منها و ضرب: $D_{f \pm g} = D_{fg} = D_f \cap D_g$
  - تقسیم: $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$
    - x های مشترکِ دو تابع به جز آن‌هایی که مخرج را صفر می‌کنند.
  - ضرب عدد: دامنه تغییر نمی‌کند. $D_{kf} = D_f$
  - مسیر در کنکور: بهتر است دامنه‌ی دو تابع را جداگانه پیدا کرده و سپس دامنه‌ی تابع ترکیبی را به‌دست آورید.
- تابع ترکیبی به ازای عدد α خواسته شده: α را جداگانه به هر تابع بدهید و حاصل آن را جای‌گذاری کنید.
  - جوجه $(\frac{f+kg}{hg})(\alpha) = \frac{f(\alpha)+kg(\alpha)}{h(\alpha).g(\alpha)}$
- کشیدن نمودار تابع ترکیبی با داشتن f و g: باید ضابطه‌ی f و g را پیدا کنید. عملیات خواسته‌شده را روی آن اجرا کرده و در آخر رسم کنید.
  - متداول‌ترین حالت: f و g خط هستند
    - اول شیب پیدا کن $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ بعد معادله بنویس. $y - y_1 = m(x - x_1)$



Scanned by CamScanner

## مفاهیم ابتدایی تابع مرکب

**شکل ماشینی تابع مرکب:**

$(gof)(a)=b$ : $a \to f \xrightarrow{c} g \to b$ ، $a \xrightarrow{gof} b$

$(fog)(a)=b$ : $a \to g \xrightarrow{c} f \to b$ ، $a \xrightarrow{fog} b$

**شکل ماشین‌ها در تست داده شده:** از آخر شروع کن و بیا عقب، هر ضابطه رو مساویِ مقدار قرار بده: $h \to k$ ، $h(x)=k$

**مقدارِیابی تابع مرکب:**

$(fog)(a)=?$ : a رو بده به g، هرچی دراومد، اونو بده به f و حاصل نهایی رو اعلام کن.

$(gof)(a)=?$ : a رو بده به f، هرچی دراومد، اونو بده به g و حاصل نهایی رو اعلام کن.

**ترتیب عمل‌کردن تابع‌ها:** همیشه اول تابع سمت راستی عمل می‌کنه، بعد سمت چپی؛ در fog اول g بعد f...

## پیدا کردن تابع مرکب

**زوج‌مرتب‌هاشو می‌خوای:** در fog، اول g رو به‌صورت نمودار پیکانی بکش و در ادامه f رو وارد کن، هر عضوی از دایره‌ی دوم که تصویر می‌شه قبوله و بقیه هیچ. در آخر بدون در نظر گرفتنِ دایره‌ی وسطی از اولی به سومی، زوج‌مرتب بنویس...

**ضابطه‌اش رو می‌خوای:**

$(fog)(x)=f(g(x))$ ، در ضابطه‌ی f به جای همه‌ی xها، g(x) رو بذار...

$(gof)(x)=g(f(x))$ ، در ضابطه‌ی g به جای همه‌ی xها، f(x) رو بذار...

**روش تستی:** یک x دلخواه در نظر بگیر و با تابع مرکبِ خواسته‌شده مقداریابی کن، بعد همین x رو در گزینه‌ها بذار، هر کدوم جواب یکسان با مقدار تابع مرکب نده، غلطه!

## کار با نمودار

**اگر نمودار قابل پیاده‌کردنِ عضوهاست:** عضوها رو به‌صورت زوج مرتب بنویس و مثلِ پیدا کردنِ زوج مرتب در تابع مرکب عمل کن...

**اگر در نمودار، عضوها معلوم نباشند:** ضابطه‌ی f و g رو بنویس (معمولاً معادله‌ی خط هستن) بعد با ضابطه‌ی تابع مرکب یا مقداریابی وارد شو...

## داشتن عضوی در تابع مرکب

**یه m بنداز وسط!**

اگر $(a,b)\in fog$ باشد، آن‌وقت: $(a,m)\in g,(m,b)\in f$

اگر $(a,b)\in gof$ باشد، آن‌وقت: $(a,m)\in f,(m,b)\in g$

## دامنه‌ی تابع مرکب

$D_{fog}=\{x \mid x\in D_g, g(x)\in D_f\}$ : دامنه‌ی f و g رو پیدا کن، بعد ضابطه‌ی g رو در محدوده‌ی دامنه‌ی f بذار و حل کن، جوابِ اینو با دامنه‌ی g اشتراک بگیر...

$D_{gof}=\{x \mid x\in D_f, f(x)\in D_g\}$ : دامنه‌ی f و g رو پیدا کن، بعد ضابطه‌ی f رو در محدوده‌ی دامنه‌ی g بذار و حل کن، جوابِ اینو با دامنه‌ی f اشتراک بگیر...

**روش تستی:** یک x دلخواه در نظر بگیر و با تابع مرکبی که داری مقداریابی کن. اگر تابع مرکب با این x، مقدارِ حقیقی نده، هر گزینه‌ای که شاملِ این x باشد، غلطه و حذف می‌شه...

## ضابطه‌ی تابع مرکب و یکی از دو تابع را داریم

**f و fog معلوم‌اند (درونی مجهوله):** f(g(x)) رو می‌سازی، یعنی به جای همه‌ی xهای f می‌ذاری g(x)، بعد مساویِ ضابطه‌ای که تست برای fog داده قرار می‌دی. f(x) مجهوله که درمیاد...

**f و gof معلوم‌اند (بیرونی مجهوله):** g(f(x)) رو تشکیل می‌دی و به جای f(x) ضابطه‌اش رو می‌ذاری: ◯ = (عبارتی برحسبِ x) f، حالا عبارت داخل پرانتز رو t بگیر و x رو بر حسب t پیدا کن و در ◯ به جای xهای موجود، اونو بذار...



Scanned by CamScanner

فصل ۶ - تابع

**ضابطه**

$(fof^{-1})(x) = x$

$(f^{-1}of)(x) = x$

**وضعیت زوج‌مرتب‌ها**

$f^{-1}of = \{(a,a) \mid a \in D_f\}$

$fof^{-1} = \{(b,b) \mid b \in R_f\}$

**دامنه و برد**

$D_{f^{-1}of} = R_{f^{-1}of} = D_f$

$D_{fof^{-1}} = R_{fof^{-1}} = R_f$

## ترکیب f و f⁻¹

**نمودار**

- برای $y = (f^{-1}of)(x)$ ، $y = x$ رو بکش و بخشی از اون رو که در محدوده‌ی xهای دامنه‌ی f می‌افته، بردار و بقیه رو حذف کن...
- برای $y = (fof^{-1})(x)$ ، $y = x$ رو بکش و بخشی از اون رو که در محدوده‌ی xهای برد f می‌افته، بردار و بقیه رو حذف کن...

**ارتباط:** در حالت کلی: $fof^{-1} \neq f^{-1}of$ $\xrightarrow{\text{شرط مساوی}}$ $D_f = R_f$

**دو تابع وارون هم:** اگر f و g بخواهند وارون هم باشند، باید $(fog)(x) = x$ یا $(gof)(x) = x$ باشد...

$(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$ و $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

$(fog^{-1})^{-1} = gof^{-1}$ و $(f^{-1}og)^{-1} = g^{-1}of$

۱- ، روی هر دو تابع اثر می‌کنه؛ ولی از سمت راست به چپ...

## پخش شدن ۱-

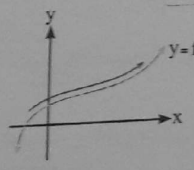
**وجود عضو** (برای α مجهول و β معلوم)

- $(fog)^{-1}(\alpha) = \beta$ ، نتیجه می‌دهد $(gof)(\beta) = \alpha$
- $(fog^{-1})(\alpha) = \beta$ ، نتیجه می‌دهد $(gof^{-1})(\beta) = \alpha$
- $(f^{-1}og)(\alpha) = \beta$ ، نتیجه می‌دهد $(g^{-1}of)(\beta) = \alpha$

## مفاهیم اولیه‌ی یکنوایی

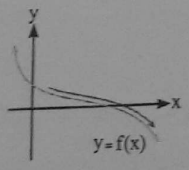
**f صعودی اکید است.**

- **مفهوم فارسی:** با افزایش مقدار xها، yهای نظیر آن‌ها زیاد می‌شود.
- **زوج‌مرتب:** $f = \{(x_1,a),(x_2,b),(x_3,c)\} \xrightarrow{x_1<x_2<x_3} a < b < c$
- **ریاضی:** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **نمودار:** از سمت چپ به راست روی تابع حرکت کنی، همش داره می‌ره بالا...



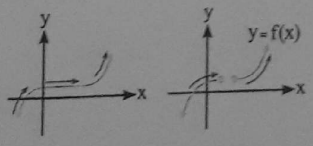

**f نزولی اکید است.**

- **مفهوم فارسی:** با افزایش مقدار xها، yهای نظیر آن‌ها کم می‌شود.
- **زوج‌مرتب:** $f = \{(x_1,a),(x_2,b),(x_3,c)\} \xrightarrow{x_1<x_2<x_3} a > b > c$
- **ریاضی:** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- **نمودار:** از سمت چپ به راست روی تابع حرکت کنی، همش داره می‌ره پایین...




**f صعودی است.**

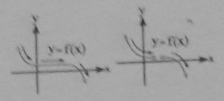
- **مفهوم فارسی:** با افزایش مقدار xها، yهای نظیر یا زیاد می‌شود یا مساوی همان مقدار قبل باقی می‌ماند (کم نمی‌شود).
- **زوج‌مرتب:** $f = \{(x_1,a),(x_2,b),(x_3,c)\} \xrightarrow{x_1<x_2<x_3} a \le b \le c$
- **ریاضی:** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$
- **نمودار:** از سمت چپ به راست روی تابع حرکت کنی، یا می‌ره بالا یا در مسیر مستقیم حرکت می‌کنه.



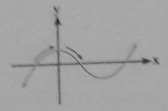



Scanned by CamScanner

- مفهوم فارسی: با افزایش مقدار x ها، yهای نظیر یا کم می‌شود یا مساوی همان مقدار قبل باقی می‌ماند (زیاد نمی‌شود).
- آ نزولی است.
  - روش ترتیب: $f=\{(x_1,a),(x_2,b),(x_3,c)\} \xrightarrow{x_1<x_2<x_3} a \ge b \ge c$
  - ریاضی: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$
- نمودار: از سمت چپ به راست روی تابع حرکت کنی، یا می‌ره پایین یا در مسیر مستقیم حرکت می‌کند.




- مفهوم یکنوایی:
  - آ یکنوای اکید است ← صعودی اکید یا نزولی اکید است.
  - آ یکنوا است ← صعودی یا نزولی است.
  - غیریکنوا است ← در بخشی از دامنه‌ی خود، صعودی و در بخشی نزولی است؛ رفتار ثابت ندارد.




- تابع خطی با شیب مثبت: $a>0,\ y=ax+b$
- تابع خطی با شیب مثبت، زیر رادیکال: $a>0,\ y=\sqrt{ax+b}$
- تابع نمایی $y=a^{mx+n}$
  - با پایه‌ی بزرگ‌تر از ۱ و ضریب x مثبت: $m>0$ و $a>1$
  - با پایه‌ی بین صفر و ۱ و ضریب x منفی: $m<0$ و $0<a<1$
- تابع لگاریتمی $y=\log_c(ax+b)$
  - با ضریب x مثبت و مبنای بزرگ‌تر از ۱: $a>0$ و $c>1$
  - با ضریب x منفی و مبنای بین صفر و ۱: $a<0$ و $0<c<1$

## تابع‌های صعودی اکید مشترک

- تابع درجه‌ی دوم $y=ax^2+bx+c$
  - با $a>0$ و بعد از x رأس: $x \ge -\frac{b}{2a}$
  - با $a<0$ و قبل از x رأس: $x \le -\frac{b}{2a}$
- تابع درجه‌ی سه و همه‌خانواده‌هاش با ضریب $x^3$ مثبت: $y=(ax+b)^3,\ y=ax^3+b,\ y=x^3$ با شرط $a>0$
- تابع قدرمطلق خطی: بعد از ریشه‌ی عبارت داخل: $y=|ax+b|$ که $a>0,\ x \ge -\frac{b}{a}$
- تابع هموگرافیک (گویا): $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $\frac{a}{c} \ne \frac{b}{d}$ و $ad-bc>0$ ، محدوده‌ای برای x که شامل ریشه‌ی مخرج نباشد
- جزء صحیح خطی با شیب مثبت: $a>0,\ y=[ax+b]$ ولی اکید نیست!
- تابع خطی با شیب منفی: $a<0,\ y=ax+b$
- تابع خطی با شیب منفی، زیر رادیکال: $a<0,\ y=\sqrt{ax+b}$
- تابع نمایی $y=a^{mx+n}$
  - با پایه‌ی بین صفر و ۱ و ضریب x مثبت: $m>0$ و $0<a<1$
  - با پایه‌ی بزرگ‌تر از ۱ و ضریب x منفی: $m<0$ و $a>1$

## تابع‌های نزولی اکید مشترک

- تابع لگاریتمی $y=\log_c(ax+b)$
  - با ضریب x منفی و مبنای بزرگ‌تر از ۱: $a<0$ و $c>1$
  - با ضریب x مثبت و مبنای بین صفر و ۱: $a>0$ و $0<c<1$
- تابع درجه‌ی دوم $y=ax^2+bx+c$
  - با $a>0$ و قبل از x رأس: $x \le -\frac{b}{2a}$
  - با $a<0$ و بعد از x رأس: $x \ge -\frac{b}{2a}$





Scanned by CamScanner

فصل ۶ - تابع



- تابع درجه‌دوم، سه و چهارم مطلق‌دار با ضریب $x^2$ مثلاً: $y=(ax+b)^2$ , $y=ax^2+b$ , $y=x^4$ با شرط $a<0$
- تابع قدرمطلق مثلثاتی مثلاً: قبل از ریشه‌ی عبارت داخل: $y=|ax+b|$ که $x\le -\frac{b}{a}$ ، $a<0$
- تابع هموگرافیک (کسری): $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$ و $ad-bc<0$ ، محدوده‌ی برای $x$ که شامل ریشه مخرج نباشد.
- جزء صحیح خطی با ضریب منفی: $y=[ax+b]$ و $a<0$ ولی اکید نیست!

**تابع دانسته‌شده گویای است از تابع‌های مقدماتی**

- جمع دو تابع همرفتار می‌شود تابعی با همان رفتار
  - صعودی = صعودی + صعودی
  - نزولی = نزولی + نزولی
- ترکیب
  - دو تابع همرفتار می‌شود صعودی
    - صعودی = صعودی ∘ صعودی
    - صعودی = نزولی ∘ نزولی
  - دو تابع غیرهمرفتار می‌شود نزولی ← نزولی = نزولی ∘ صعودی
- ضرب در مثبت ← رفتار را عوض می‌کند ولی ضریب مثبت نه!

$$\begin{cases} \text{نزولی } kf \\ \text{صعودی } kf \end{cases} \xrightarrow{k<0} \begin{cases} \text{صعودی } f \\ \text{نزولی } f \end{cases}$$

نتیجه
- اگر $f$ نزولی و $g$ صعودی باشد، $f-g$ نزولی است.
- اگر $f$ صعودی و $g$ نزولی باشد، $f-g$ صعودی است.

**روش‌های تشخیص یکنوایی**

- تعریف ریاضی: قرار بده $x_1<x_2$ و سعی کن ضابطه‌ی تابع رو در دو طرف تساوی بسازی.
- از طریق یک‌به‌یک بودن
  - اگر $f$ یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه یکنوایی اکید است.
  - اگر $f$ یک‌به‌یک نباشد، درباره‌ی صعودی یا نزولی بودنِ $f$ نمی‌توان اظهار نظر کلی کرد!
  - اگر $f$ یکنوا نباشد، یک‌به‌یک هم نخواهد بود.
- رسم تابع: برای قدرمطلقی‌ها، جزءصحیح‌ها و چند ضابطه‌ای‌ها بهترین راه است.
- با مشتق
  - اگر در فاصله‌ای $f'>0$ باشد، $f$ صعودی اکید بوده است.
  - اگر در فاصله‌ای $f'<0$ باشد، $f$ نزولی اکید بوده است.

**کاربرد تابع یکنوا**

- یافتن برد تابع با دامنه‌ی معین: فقط اول و آخر دامنه رو در تابع جای‌گذاری کن تا اول و آخر برد دربیاد... $D=[a,b]$
  - $f$ صعودی اکید: $R=[f(a),f(b)]$
  - $f$ نزولی اکید: $R=[f(b),f(a)]$
- تلاقی $f$ و $f^{-1}$
  - $f$ صعودی اکید است ← $f$ را با $y=x$ قطع بده.
  - $f$ نزولی اکید است ← $f$ را با $y=-x$ قطع بده.
- رفتار موافق هم‌بازی
  - $f$ صعودی اکید $\Leftrightarrow$ $f^{-1}$ صعودی اکید
  - $f$ نزولی اکید $\Leftrightarrow$ $f^{-1}$ نزولی اکید
- دامنه و برد: $D_f=R_{f^{-1}}$

**تابع یک‌به‌یک**

- اگر $f$ یک‌به‌یک باشد، $f^{-1}$ هم یک‌به‌یک خواهد بود.
- بازه‌ی یکنوایی: اگر $f$ روی بازه‌ی $[a,b]$
  - صعودی اکید باشد ← $f^{-1}$ روی $[f(a),f(b)]$ صعودی اکید است.
  - نزولی اکید باشد ← $f^{-1}$ روی $[f(b),f(a)]$ نزولی اکید است.



Scanned by CamScanner

## فصل در یک نگاه

**تابع نمایی $f(x)=a^x$**

- دامنه و برد: $R=\mathbb{R}^+, D=\mathbb{R}$ نتیجه $a^x$، هیچ‌گاه منفی و صفر نمی‌شود.
- تقاطع با محورها:
  - محور xها را قطع نمی‌کند.
  - محور yها را در نقطه‌ی ۱ قطع می‌کند.
- یک به یک است: ضابطه‌ی وارون $f^{-1}(x)=\log_a x$
- نمودار:
  - $a>1$: رفتار صعودی است.
  - $0<a<1$: رفتار نزولی است.
- ضرب منفی تابع $-a^x$: نمودار: شکل $a^x$ را بکش و نسبت به محور xها قرینه کن...
  - متفاوت: برعکس $a^x$ است.
    - $a>1$ نزولی است.
    - $0<a<1$ صعودی است.
- شناسایی تابع نمایی: در جدول داده‌های x و y:
  - xها دنباله‌ی حسابی
  - yها دنباله‌ی هندسی

  پایه‌ی تابع نمایی $a^d=r$

**تابع لگاریتمی $f(x)=\log_a x$**

- دامنه و برد: $R=\mathbb{R}$ و $D=\mathbb{R}^+$ نتیجه $x,a>0, a\neq 1$
- تقاطع با محورها:
  - محور xها را در ۱ قطع می‌کند نتیجه $\log_a 1=0$
  - محور yها را قطع نمی‌کند نتیجه $\log_a 0=$ نامعین
- نمودار:
  - $a>1$: رفتار صعودی است.
  - $0<a<1$: رفتار نزولی است.
- ضرب منفی $-\log_a x$ نسبت به محور xها قرینه کن...
- علامت:
  - $a>1$:
    - $u>1$ آن‌گاه: $\log_a u>0$.
    - $0<u<1$ آن‌گاه: $\log_a u<0$.
  - $0<a<1$:
    - $u>1$ آن‌گاه: $\log_a u<0$.
    - $0<u<1$ آن‌گاه: $\log_a u>0$.



Scanned by CamScanner

فصل ۷ - تابع نمایی و لگاریتمی



**تعریف** $\log_a u = k \Rightarrow u = a^k$ مشروط به زمانی که از بین اعداد u و a و k تنها یکی، مجهول باشد.

**ویژگی‌ها**

- $\log_a a = 1$
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ ضرب را جمع می‌کند!
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ تقسیم را منها می‌کند!
- $\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x$ انتقال توان!
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ تغییر مبنا
  - نتیجه: $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$
  - نتیجه: $\log_a x \log_b a = \log_b x$

**ویژگی‌های لگاریتم**

- جمع لگاریتم‌ها: $m\log_c a + n\log_c b = \log_c a^m b^n$
- منهای لگاریتم‌ها: $m\log_c a - n\log_c b = \log_c \frac{a^m}{b^n}$
- عدد توهینه می‌شود: $\log a = \log_{10} a$
- در مبنای ۱۰: $\log 2 + \log 5 = 1$
- لگاریتم در توان است: $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ جای پایه و عدد مقابل log را عوض کن
- $a^{\log_a b} = b$

**معادلات و نامعادلات نمایی**

- عامل اول تمام پایه‌ها یکی است
  - روش حل: پایه‌ها را یکی کن. تمرین: $a^u = a^v \Rightarrow u = v$
  - $a^m \times a^n = a^{m+n}$ $\quad a^{mn} = (a^m)^n$ $\quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- عبارت نمایی تکرار می‌بینی
  - روش حل: تغییر متغیر بمنصور. تمرین: $a^{2x} = A^2, a^x = A$ معادله‌ی درجه ۲ حل کن.
- عدد نمایی را مساوی با یک عدد پیدا کردی ولی ۱ عامل توانیمین نیست!
  - روش حل: از دو طرف تساوی log بگیر در مبنای پایه!
- نامعادلات نمایی
  - تمام پایه‌ها را یکی کن بعدش
    - $a^x \geq a^y \xrightarrow{a>1} x \geq y$ ، حفظ جهت!
    - $b^x \geq b^y \xrightarrow{0<b<1} x \leq y$ ، تغییر جهت!

**معادلات و نامعادلات لگاریتمی**

- معادلات لگاریتمی
  - روش حل: تمام logها را به یکی تبدیل کن، بعدش:
    - $\log_a u = \log_a v \Rightarrow u = v$ ، logها را خط بزن
    - $\log_a u = b \Rightarrow u = a^b$ ، برخش بده
  - بررسی جواب‌ها: x های بدست آمده باید در بعض دامنه‌ی لگاریتم‌ها باشند
    - مبنا و مقابل هیچ لگاریتمی منفی نشود.
    - مبنا هم، هیچ‌گاه ۱ نشود!
- نامعادلات لگاریتمی
  - روش حل: تمام logها را به یکی تبدیل کن، بعدش:
    - $a > 1$: $\log_a u \geq b \Rightarrow u \geq a^b$
    - $0 < a < 1$: $\log_a u \geq b \Rightarrow u \leq a^b$
  - حذف log ها:
    - $a > 1$: $\log_a A \geq \log_a B \Rightarrow A \geq B$
    - $0 < b < 1$: $\log_b A \geq \log_b B \Rightarrow A \leq B$
  - قدم آخر: دامنه‌ی تمام logها را پیدا کن و با محدوده‌ای که بالا درآوردی، اشتراک بگیر.

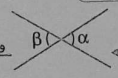
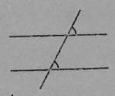
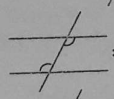
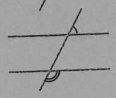
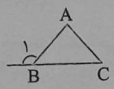
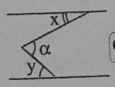
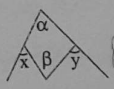
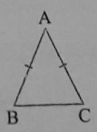
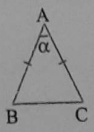
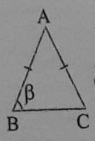


Scanned by CamScanner

"فصل ۸ هندسه ۱"

# فصل در یک نگاه

## زاویه‌ها

- دو زاویه‌ی متمم: $\alpha+\beta=۹۰^\circ$
- دو زاویه‌ی مکمل: $\alpha+\beta=۱۸۰^\circ$
- دو زاویه‌ی متقابل به رأس: شکل →  ویژگی → $\alpha=\beta$
- زاویه‌ها در خطوط موازی مورب
  - جاده‌ها: مساوی‌اند: 
  - تمامیِ زاویه‌های باز: مساوی‌اند: 
  - هر جاده با یک باز: مکمل‌اند: 
  - توجه: از نقطه‌ی شکست، موازیِ دو خط موازی خطی رسم کن...
- زاویه‌ی خارجی در مثلث
  - به‌وجود آمدن: با امتدادِ ضلعِ مثلث به‌وجود می‌آید.
  - اندازه: مجموع دو زاویه‌ی داخلیِ غیر مجاور $\hat{B}_1=\hat{A}+\hat{C}$ 
- زاویه‌ی اسیر بین دو خط موازی: $\alpha=x+y$ 
- زاویه‌های بادبادک: $\alpha+\beta=x+y$ 
- در مثلث متساوی‌الساقین (دو ضلع مساوی دارد)
  -  زوایای مجاور به قاعده → $\hat{B}=\hat{C}$
  -  $\hat{B}=\hat{C}=\frac{۱۸۰^\circ-\alpha}{۲}$
  -  $\hat{C}=\beta\ ,\ \hat{A}=۱۸۰^\circ-۲\beta$
  - نیمساز و ارتفاع و میانه‌ی نظیر قاعده‌اش بر هم منطبق‌اند.

## هم‌نهشتی دو مثلث

- دو مثلث در حالت کلی
  - فایده: اجزاء نظیرِ دو مثلث با هم مساوی‌اند.
  - شناخت تست:
    - ض ز ض
    - ز ض ز
    - ض ض ض

  شکلِ تست شامل چند مثلث است و تعدادی پاره‌خطِ مساوی هم می‌بینیم...
- دو مثلث قائم‌الزاویه
  - وتر و یک ضلع
  - وتر و یک زاویه‌ی حاده



Scanned by CamScanner

فصل ۸ هندسه ۱

مهروماه

## درباره‌ی n ضلعی

- مجموع زوایای داخلی: $(n-2)180^\circ$ — یک زاویه‌ی داخلی n ضلعی منتظم: $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$
- تعداد قطرها: $\frac{n(n-3)}{2}$
- مجموع زوایای خارجی: $360^\circ$ — یک زاویه‌ی خارجی n ضلعی منتظم: $\frac{360^\circ}{n}$

## استدلال

- گزاره
  - مفهوم: جمله‌ی خبری که وضعیت درستی یا نادرستیِ آن کاملاً معلوم یا قابلِ مشخص کردن باشد.
  - چه جملاتی گزاره نیستند: جملاتِ سؤالی، امری، تعجبی، x دار و آن‌هایی که قیدِ مبهم دارند.
  - نقیض گزاره: از خودِ گزاره ساخته می‌شود؛ با گذاشتنِ کلماتِ «این‌طور نیست که...» در ابتدای گزاره.
  - یه‌جور دیگه: گزاره درست باشد، نقیضش غلطه...
- انواع استدلال
  - استقرایی
    - از مشاهده‌ی چند موردِ جزئی، نتیجه‌ی کلی بگیری.
    - رسیدن از جزء به کل.
  - استنتاجی: با نتایج درستِ قبلی، چیزی را ثابت کنیم.
  - برهان خلف: فرض می‌کنیم حکم غلط باشد و با کمک فرض و قضایای قبلی به یک تناقض آشکار می‌رسیم...
  - مثال نقض: این برای اثبات کردن نیست! آوردن یک مثال است که ویژگیِ مورد نظر را ندارد؛ این‌طوری کلیتِ حکم نقض می‌شود!
  - استدلال‌های درست: استنتاجی و برهان خلف نتیجه‌شان همواره درست است.
- آوردن دلیل
- جمله‌ی درستِ کاربردی
  - فرم: $A \Rightarrow B$
  - فرض و حکم: A را فرض و B را حکم می‌گوییم.
  - عکس قضیه: در قضیه‌ی $A \Rightarrow B$، عکس می‌شود: $B \Rightarrow A$
  - اگر عکسِ قضیه هم درست باشد، قضیه می‌شود دو شرطی: $A \Leftrightarrow B$

## ترسیم

- با کمک ویژگیِ نقطه: **مجموعه‌ی تمامی نقاطی که**
  - تا نقطه‌ی ثابتِ A، فاصله‌ی k دارند ← جواب ← دایره‌ای به مرکز A و شعاع k
  - تا خطِ ثابتِ L، فاصله‌ی k دارند ← جواب ← دو خط موازی با L در طرفین آن و به فاصله‌ی k از آن
  - از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله‌اند ← جواب ← عمودمنصفِ پاره‌خطِ AB
  - از دو خط متقاطعِ L و L′، به یک فاصله‌اند ← جواب ← نیمساز زاویه‌ی بین L و L′
  - روش حل تست: نقطه‌ای که از شما می‌خواهند، دو ویژگی از چهارتای بالا را دارد، جوابِ هر کدام از آن دو تا را بکشید و تلاقی دهید...
- ترسیم‌های هندسی
  - وسایل ترسیم: خط‌کشِ غیر مدرج و پرگار
  - ترسیم‌های ساده — این‌ها پایه‌ی هر رسم دیگری هستند
    - عمودمنصفِ AB — جوردیگه ← پیدا کردنِ وسطِ پاره‌خط
    - نیمساز زاویه
    - کشیدنِ عمود
      - از نقطه‌ی روی خط
      - از نقطه‌ی بیرون خط
    - خط موازی از نقطه‌ی خارجِ خط
    - رسم مثلث با داشتن اندازه‌ی سه ضلع آن
  - حل تستِ رسم مثلث
    - یک ضلع را داده — برای پیدا کردن رأس سوم
      - میانه را داده ← به مرکز وسطِ ضلع و شعاعِ میانه کمان بزن.
      - ارتفاع را داده ← خط موازی ضلع و به فاصله‌ی ارتفاع از آن بکش.
    - یک مثلث کوچکِ داخل شکل
      - با معلوم بودنِ سه ضلعش داریم ← آن را بکش و با آن مثلث را کامل کن.



Scanned by CamScanner

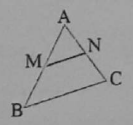
- **ویژگی‌های حاصل از ترسیم**
  - عمودمنصف‌های هر مثلث دلخواه در یک نقطه همرس‌اند.
    - اسم نقطه: مرکز دایره محیطی
    - ویژگی نقطه: از هر سه رأس به یک فاصله است.
  - نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث دلخواه در یک نقطه همرس‌اند.
    - اسم نقطه: مرکز دایره محاطی
    - ویژگی نقطه: از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

## نسبت و تناسب

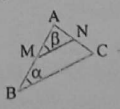
- **معنای نسبت:** به کسرِ $\frac{a}{b}$ می‌گوییم نسبت؛ $b \neq 0$.
- **خواص تناسب:** اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ باشد، آن‌گاه
  - $ad = bc$
  - عملیات ترکیب
    - در صورت: $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$
    - در مخرج: $\frac{a}{b+a} = \frac{c}{d+c}$
  - عملیات تفضیل
    - در صورت: $\frac{|a-b|}{b} = \frac{|c-d|}{d}$
    - در مخرج: $\frac{a}{|a-b|} = \frac{c}{|c-d|}$
  - جمع صورت‌ها با هم و مخرج‌ها با هم: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = k$
  - کار با تناسب: اگر $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ بود، به‌طوری که m و n دو عددِ معلوم بودند، بگویید: $a = mk$ و $b = nk$

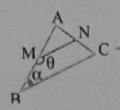
ببین: $\frac{x}{y} = \frac{۳}{۴}$ نتیجه می‌دهد $x = ۳k$ و $y = ۴k$.

- **تالس**
  - **قضیه‌ی تالس**
    - شرط: باید خطی در مثلث، موازیِ یک ضلع آن کشیده شده باشد.
    - تالس نویسی (رأس را پیدا کن)
      - تالس جزء به جزء: $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$
      - تالس جزء به کل: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

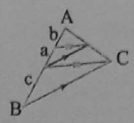



    - فایده: اگر اندازه‌ی خطِ موازی برایتان مهم است، باید تالس را این‌طوری بنویسید...
    - تالس در حضور زاویه‌ها

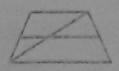


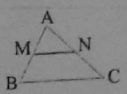

    یعنی $MN \parallel BC$
  - **میان خط**
    - مفهوم: خطی است که وسط‌هایِ دو ضلعِ مثلثی را به هم، وصل می‌کند.
    - ویژگی
      - موازی ضلع روبه‌رویی خود است.
      - نصف ضلع روبه‌رویی خود است.
  - **تو در تو**
    - شناسایی: با علامتِ zoro در مثلث مواجه هستیم:




    - نوشتن رابطه: بروید سراغ ضلعی که سه قسمت شده؛ بعدش $a^۲ = bc$
  - در ذوزنقه: یکی از قطرها را بکش و تالس بنویس:



  - عکس تالس: اگر خطی یکی از تناسب‌هایِ تالس را در مثلث برقرار کرده باشد، با ضلع روبه‌رویی خودش موازی است.




$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \atop \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \longrightarrow MN \parallel BC$$



Scanned by CamScanner

## تشابه

- **مفهوم**
  - تمام زوایا: نظیر به نظیر مساوی‌اند.
  - تمام اضلاع: نظیر به نظیر، ضریبی از هم هستند $\xrightarrow{\text{نسبت تشابه}}$ نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث است. (k)
- **شکل هندسی تشابه دو مثلث:**

$$\boxed{\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k}$$

- **حالت‌های تشابه دو مثلث**
  - زز ← دو زاویه‌ی مساوی $\xrightarrow{\text{یادت باشه}}$ این اصلی‌ترین حالت اثبات تشابه دو مثلث است.
  - ض ز ض ← دو ضلع متناسب و زاویه‌ی بین آن‌ها مساوی
  - ض ض ض ← سه ضلع متناسب
- **فایده‌ی اثبات تشابه دو مثلث**
  - اضلاع متناظر را از روی زاویه‌ها شناسایی کن و تناسب حاصل را بنویس.
  - زاویه‌های متناظر، مساوی‌اند.
- **کنکوری‌ترین حالت‌های (زز)**
  - **مثلث پاپیونی داریم**
    - دو تا پاپیونی قائم الزاویه

    - دو تا پاپیونی که ضلع رو به روی موازی دارند.

    - دو تا پاپیونی که دارای یک زاویه‌ی مساوی هستند.

  - **مثلث گوشه‌نشین**
    - مثلث گوشه‌نشین شما قائم الزاویه است و در گوشه‌ی مثلث قائم‌الزاویه هم نشسته است!

    - مثلث گوشه‌نشین شما دارای یک زاویه‌ی مساوی با مثلث اصلی است:

- **دو مثلث توسطِ خود تست گفته شده**
  - اضلاع را می‌توان از کوچک به بزرگ مرتب کرد: $\frac{\text{ضلع کوچک اولی}}{\text{ضلع کوچک دومی}}=\frac{\text{ضلع متوسط اولی}}{\text{ضلع متوسط دومی}}=\frac{\text{ضلع بزرگ اولی}}{\text{ضلع بزرگ دومی}}$
  - اضلاع را نمی‌توان از کوچک به بزرگ مرتب کرد ← همه‌ی حالت‌های ممکن برای تشابه را در نظر بگیر.

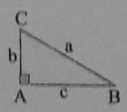
## تشابه اجزای فرعی در مثلث

- نسبت اضلاع k است
  - نسبت میانه‌های نظیر : (k)
  - نسبت نیمسازهای نظیر : (k)
  - نسبت ارتفاع‌های نظیر : (k)
  - نسبت محیط‌های نظیر : (k)

    هر کدام از این‌ها را داده بود، انگار نسبت تشابه داده.
  - نسبت مساحت‌های نظیر : $(k^2)$
    - حل‌لست ← اگر نسبت مساحت‌ها را داده بود جذر بگیر و نسبت تشابه را گیر بیار...

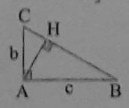
## ویژگی‌های مثلث قائم الزاویه

- **فیثاغورس:**




$$\boxed{\hat{A}=90^\circ} \Leftrightarrow \boxed{a^2=b^2+c^2},$$

- **ارتفاع وارد بر وتر کشیده شده**




  - **مثلث‌های متشابه موجود**
    - $\overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{ABC}$
    - $\overset{\triangle}{AHC} \sim \overset{\triangle}{ABC}$
    - $\overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{AHC}$
  - **روابط طولی**
    - با اندازه‌ی ارتفاع و قطعه‌ها کار داری: $\boxed{AH^2=BH.CH}$
    - با اضلاع و قطعه‌های حاصل روی وتر کار داری: $\boxed{AB^2=BH.BC}$ ، $\boxed{AC^2=CH.BC}$
    - با ارتفاع و اضلاع کار داری: $\boxed{AH=\frac{bc}{a}}$



Scanned by CamScanner

# فصل در یک نگاه

## در مورد زاویه

طول کمان

$\ell = R\theta$ ، یعنی طولِ کمان، می‌شود ضربِ شعاع دایره در زاویه‌ی مرکزیِ روبه‌رویش بر حسب رادیان.

تبدیل واحد

درجه به رادیان: در $\frac{\pi}{180^\circ}$ ضرب کن.

رادیان به درجه: در $\frac{180^\circ}{\pi}$ ضرب کن.

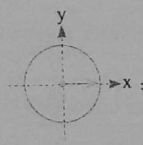
مبنای اندازه‌گیری

شعاع: ۱ است.

مبدأ مختصات است.

جهت مثلثاتی: خلافِ حرکت عقربه‌های ساعت.

شروع کمان‌ها: شعاعی از دایره که روی جهتِ + محور x هاست:



## دایره‌ی مثلثاتی

sin α و cos α

از انتهایِ کمانِ α بر دو محور عمود کن.

حدود $-1 \le \sin\alpha \le 1, -1 \le \cos\alpha \le 1$

علامت نسبت‌های مثلثاتی

ناحیه ۱: همه + اند.

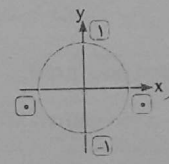
ناحیه ۲: فقط sin، + است.

ناحیه ۳: tan (و cot)، + است.

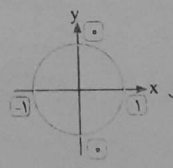
ناحیه ۴: فقط cos، + است.

به‌ترتیب در ناحیه‌ها، هستک مثبت است.

مقدار نسبت‌های مثلثاتی



سینوس



کسینوس

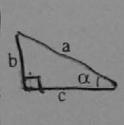
$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

زوایای معروف

| α | ۳۰° | ۴۵° | ۶۰° |
|---|---|---|---|
| sinα | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| cosα | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

## نسبت‌های مثلثاتی

در مثلث قائم‌الزاویه



سینوس: ضلع مقابل به وتر: $\sin\alpha = \frac{b}{a}$

کسینوس: ضلع مجاور به وتر: $\cos\alpha = \frac{c}{a}$

تانژانت: ضلع مقابل به مجاور: $\tan\alpha = \frac{b}{c}$

کتانژانت: ضلع مجاور به مقابل: $\cot\alpha = \frac{c}{b}$



Scanned by CamScanner

- پیدا کردن همه‌ی نسبت‌ها (با داشتن یکی از آن‌ها و انتهای کمان)
  - استفاده از اتحادهای
    - $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
    - $\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ یا $\cot^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$
  - راه حل شیک ← کشیدن مثلث قائم‌الزاویه‌ای که برای یک زاویه‌اش، نسبت مثلثاتی فرض برقراره بعدش ← فیثاغورس
  - بعدش ← پیدا کردن نسبت‌های مثلثاتی دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه
- روابط مقدماتی
  - $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
  - $\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ و $\cot^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$
  - $\tan\alpha\,.\cot\alpha=1$
- روابط فرعی
  - $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$
  - $\sin^3\alpha\pm\cos^3\alpha=(\sin\alpha\pm\cos\alpha)(1\mp\sin\alpha\cos\alpha)$
  - $(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)=\cos^2\alpha$
  - $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2}{\sin 2\alpha}$
  - $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ و $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

## رابطه‌های تکمیلی مثلثات

- منفی در کمان
  - کسینوس: منفی را می‌خورد: $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$
  - نسبت‌های دیگر غیر از کسینوس: منها را می‌دهند بیرون
    - $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$
    - $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$
    - $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$
- $2\pi$ در کمان: به جای $2\pi$، بذار صفر (انگار هر مضرب زوجی از $\pi$، صفره.)
  - $\sin(2\pi\pm\alpha)=\sin(\pm\alpha)$
  - $\cos(2\pi\pm\alpha)=\cos(\pm\alpha)=\cos\alpha$
  - $\tan(2\pi\pm\alpha)=\tan(\pm\alpha)$
  - $\cot(2\pi\pm\alpha)=\cot(\pm\alpha)$
- $\pi$ در کمان
  - فرم کمان: $(\pi\pm\bigcirc)$
  - تعیین ناحیه
    - $\pi+\alpha$: ناحیه‌ی سوم است
    - $\pi-\alpha$: ناحیه‌ی دوم است
  - پیدا کردن جواب: در کمان، $(\pi\pm\bigcirc)$ است شما فقط $\bigcirc$ را نگه دارید با نسبت پشت آن. علامت نسبت مثلثاتی را طبق ناحیه‌ی بالا، پشت آن بذارید.
  - صورت ریاضی:

| | sin | cos | tan | cot |
|---|---|---|---|---|
| $\pi+\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\tan\alpha$ | $\cot\alpha$ |
| $\pi-\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\tan\alpha$ | $-\cot\alpha$ |



Scanned by CamScanner

$(\frac{\pi}{2} \pm \quad)$ یا $(\frac{3\pi}{2} \pm \quad)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{\pi}{2}-\alpha$ | $\frac{\pi}{2}+\alpha$ | $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ | $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ |
| اول | دوم | سوم | چهارم |

نسبت مثلثاتی رو همنوا و مخالف بنویس. کمان هم همیشه $\alpha$ و علامت نسبت مثلثاتی اولیه رو طبق ناحیه‌ی بالا بذار پشت.

| | sin | cos | tan | cot | | sin | cos | tan | cot |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\cot\alpha$ | $\tan\alpha$ | $\frac{\pi}{2}-\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cot\alpha$ | $\tan\alpha$ |
| $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\cot\alpha$ | $-\tan\alpha$ | $\frac{\pi}{2}+\alpha$ | $\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cot\alpha$ | $-\tan\alpha$ |

sin مساوی دارند و cos قرینه.

هر نسبت می‌شود همنوا و مخالف دیگری.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

این فرمول را برای هر کمانی که باز کنی، در سمت راست، نصف می‌شود: $\sin 2u = 2\sin u\cos u$

به حالت کلکوری $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

ضرب سینوس و کسینوس یک کمان را دیدی! $\sin u\cos u = \frac{1}{2}\sin 2u$

$$(\sin u \pm \cos u)^2 = 1 \pm \sin 2u$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

برای هر کمانی، این فرمول را باز کنی، در سمت راست نصف می‌شود:

$$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1 = 1 - 2\sin^2 u$$

فرمول‌های $2\alpha$

$$\begin{cases} 1+\cos 2u = 2\cos^2 u \\ 1-\cos 2u = 2\sin^2 u \end{cases}$$ : $1 \pm \cos$ دیدی یاد طلایی بیفت!

پیدا کردن نسبت مثلثاتی زاویه‌های غیر معروفی که دو برابرشان معروف است: $15^\circ, 22/5^\circ, 67/5^\circ, 75^\circ$

با داشتن یک نسبت مثلثاتی $\alpha$، نسبت‌های $2\alpha$ را پیدا کنی ترتیب اول حتما $\cos 2\alpha$ را پیدا کن.

اول فرمول‌های مقدماتی مثلثات را برای $\alpha$ می‌نویسی بعداً همین فرمول‌ها را برای $2\alpha$.

$$\begin{cases} \cot u + \tan u = \frac{2}{\sin 2u} \\ \cot u - \tan u = 2\cot 2u \end{cases}$$ جمع یا تفاضل تانژانت و کتانژانت دیدی، یاد این‌ها بیفت!

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$



Scanned by CamScanner

فصل ۹ ـ مثلثات



## مثلثات در لباس هندسه

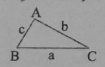
- در مثلث قائم‌الزاویه: ضلع مقابل به زاویه‌ی $30^\circ$، نصف وتر است. صورت ریاضی: $b=\frac{a}{2}$

- در مثلث متساوی الاضلاع
  - ارتفاع: $\frac{\sqrt{3}}{2}a$
  - مساحت: $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

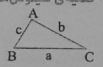
- در شش ضلعی منتظم
  - مساحت: $S=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$
  - قطر کوچک: $d_1=\sqrt{3}a$
  - قطر بزرگ: $d_2=2a$

هر زاویه‌ی داخلی $120^\circ$

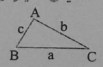
- در مثلث دلخواه: مساحت می‌شود
  - $S=\frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$
  - $S=\frac{1}{2}ac\sin\hat{B}$
  - $S=\frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$




- قضیه‌ی سینوس‌ها: در هر مثلث دلخواه داریم: $\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}$




- قضیه‌ی کسینوس‌ها: در هر مثلث دلخواه داریم:
  - $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$
  - $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$
  - $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$




## دوره‌ی تناوب

- تعریف
  - مفهوم تابع متناوب: اگر عدد مثبت c موجود باشد به‌طوری که: $f(x+c)=f(x)$، f می‌شود متناوب.
  - دوره‌ی تناوب: کوچک‌ترین عددِ c در تعریف بالا، دوره‌ی تناوب است نماد: T.
- پیدا کردنِ T
  - نسبت‌های مثلثاتی معروف
    - سینوس: $y=k\sin(ax+b)+t$ دوره‌ی تناوب: $T=\frac{2\pi}{|a|}$
    - کسینوس: $y=k\cos(ax+b)+t$ دوره‌ی تناوب: $T=\frac{2\pi}{|a|}$
    - تانژانت: $y=k\tan(ax+b)+t$ دوره‌ی تناوب: $T=\frac{\pi}{|a|}$
  - بی‌تأثیرها: ضریب نسبت مثلثاتی، عددِ ثابت جمع و منها شده با کمان یا با نسبت مثلثاتی در یافتنِ T بی‌اثرند! فقط ضریبِ x کِمان مهمه...!
  - مجموع چند عبارت
    - اگر عبارت قابل ساده شدن است ← اول ساده کن با اتحادهای مثلثاتی و بعد T پیدا کن..
    - اگر عبارت ساده نمی‌شود ← تک تک، دوره تناوب بگیر و بعد بین دوره تناوب‌ها کـ‌م‌م حساب کن.

کـ‌م‌م کسری‌ها: $[\frac{a}{b},\frac{c}{d}]=\frac{[a,c]}{(b,d)}$



Scanned by CamScanner

# فصل ۹ ـ مثلثات

**تغییر دوره تناوب با**

- **توان فرد** ... تاثیری بر T ندارد. مثل $y=\sin^{3}2x, T=\pi$
- **توان زوج** ... دوره تناوب را نصف می‌کند. مثل $y=\sin^{2}2x, T=\frac{\pi}{2}$
- **قدر مطلق** ... دوره تناوب را نصف می‌کند. مثل $y=|\sin 2x|, T=\frac{\pi}{2}$

**موج سینوسی** $f(t)=a\sin(bt)+c$

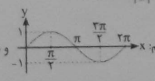
**موج کسینوسی** $f(t)=a\cos(bt)+c$

دامنه‌ی موج: $a=\frac{Max-Min}{2}$

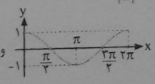
$c=\frac{Max+Min}{2}$

$|b|=\frac{2\pi}{T}$

## $y=\sin u$

- دامنه: $D=\mathbb{R}$ ، مگر این‌که u محدودیتی داشته باشد!
- بُرد: $y=\sin x \Rightarrow R=[-1,1]$ حالت کاربردی $y=a\sin(bx+c) \xrightarrow{\text{برد}} [-a,a]$
- ماکسیمم: قرار دهید $u=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ تا مقدار sin، بشود ۱.
- مینیمم: قرار دهید $u=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ تا مقدار sin، بشود ۱-.
- تلاقی با محورx‌ها: قرار دهید $u=k\pi$ تا مقدار sin، بشود صفر.
- دوره‌ی تناوب: برای تابع $y=k\sin(ax+b)+t$ عبارت است از $\frac{2\pi}{|a|}$.
- کشیدن تابع: کافی است $y=\sin x$ را در یک دوره تناوب آن بلد باشیم:  و در فاصله‌های به طول $2\pi$، همین‌طوری تکرارش کنیم!

## $y=\cos u$

- دامنه: $D=\mathbb{R}$ ، مگر این‌که u محدودیتِ خاصی داشته باشد!
- بُرد: $y=\cos x \Rightarrow R=[-1,1]$ حالت کاربردی $y=a\cos(bx+c) \xrightarrow{\text{برد}} [-a,a]$
- ماکسیمم: قرار دهید $u=2k\pi$ تا مقدار cos، بشود ۱.
- مینیمم: قرار دهید $u=2k\pi+\pi$ تا مقدار cos، بشود ۱-.
- تلاقی با محورx‌ها: قرار دهید $u=k\pi+\frac{\pi}{2}$ تا مقدار cos، بشود صفر.
- دوره‌ی تناوب: برای تابع $y=k\cos(ax+b)+t$ عبارت است از $\frac{2\pi}{|a|}$.
- کشیدن تابع: کافی است $y=\cos x$ را در یک دوره تناوب آن بلد باشیم:  و در فاصله‌های به طول $2\pi$، همین‌طوری تکرارش کنیم!

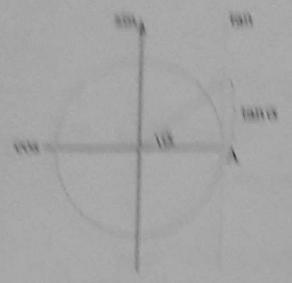
مهمه...!



Scanned by CamScanner

## تانژانت

- در دایره مثلثاتی
  - محور تانژانت: خطی مماس بر دایره، سمت راست آن و موازی محور sin
  - مبدأ محور تانژانت: نقطه‌ی A
    - بالای A: tan مثبت است.
    - پایین A: tan منفی است.
  - مشخص کردن تانژانت: انتهای کمان را ادامه بده تا محورش را قطع کند از مبدأ تا نقطه‌ی تلاقی، می‌شود tan زاویه.
  - علامت: در ناحیه اول و سوم مثبت است، در دوم و چهارم منفی.




- تابع تانژانت
  - دامنه: $f(x)=\tan u \xrightarrow{\text{دامنه}} D=\mathbb{R}-\{x \mid u=k\pi+\frac{\pi}{2}\}$
  - تعریف نشده: هر کمانی به‌صورت $\frac{k\pi}{2}$، که k صحیح و فرد باشد، تانژانت تعریف نشده دارد.
  - برد: $\mathbb{R}$
  - ماکسیمم و مینیمم: $y=\tan x$ ماکسیمم و مینیمم ندارد!
  - تلاقی با محور xها: جایی که تانژانت صفر می‌شود: $y=\tan u \xrightarrow{\text{صفر شدن}} u=k\pi$
  - دوره‌ی تناوب: اگر $f(x)=k\tan(ax+b)+t$ باشد: $T=\frac{\pi}{|a|}$
  - رفتار: غیر یکنواست، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر هم نیست!
  - تمرین: در بازه‌ی $[0,\pi]$ بلد باش و در بازه‌هایی با این طول، عیناً شکل تابع را ادامه بده...

  - محدوده‌ای برای x داریم که شامل $x=\frac{k\pi}{2}$ (k فرد و صحیح) نیست
    - رفتار تانژانت: در این‌صورت، صعودی اکید بوده و یک‌به‌یک و وارون‌پذیر هم هست.
    - برد: در این‌صورت برای دامنه‌ی $[a,b]$ برد می‌شود $[\tan a, \tan b]$.

## معادله‌های مثلثاتی

- الفبای معادله
  - حالت کلی:
    - $\sin x=\sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\alpha \\ x=2k\pi+\pi-\alpha \end{cases}$
    - $\cos x=\cos\alpha \Rightarrow x=2k\pi\pm\alpha$
    - کمند کلیدی: $\tan x=\tan\alpha \Rightarrow x=k\pi+\alpha$
  - حالت خاص: وقتی جواب سینوس و کسینوس صفر و ۱± شود:

| | 0 | 1 | -1 |
|---|---|---|---|
| sinx | $k\pi$ | $2k\pi+\frac{\pi}{2}$ | $2k\pi-\frac{\pi}{2}$ |
| cosx | $2k\pi$ | $k\pi+\frac{\pi}{2}$ | $2k\pi+\pi$ |

  - اگر کمان سینوس و کسینوس، x نبود: کمان، عبارتی بر حسب x بود، مثل u، آن‌وقت u را مساوی این‌ها بذار...
  - قالب آماده: یعنی سینوس یا کسینوس را بی‌ضریب و بی‌توان، مساوی یک عدد پیدا کنی که آن عدد معروف است...
    - $\sin u=$
    - $\cos u=$
- رسیدن به قالب آماده
  - در ابتدا لازم است ساده کنی
    - اتحادهای $(\frac{k\pi}{2}\pm\alpha)$ را در کمان‌ها می‌بینی...
    - اتحادهای مقدماتی مثلثات را باید به‌کار ببری...
    - اتحادهای $2\alpha$ (sin یا cos رو وارد کن)
      - sin cos می‌بینی...
      - طلایی $1\pm\cos$ داری...
      - $2\cos^2-1$ و $1-2\sin^2$ داری...



Scanned by CamScanner

با منفی

$= -\cos u \Rightarrow \quad = \cos(\pi - u)$ منفی ضریب کسینوس را بردار و در عوض کمان را مکمل کن

$= -\sin u \Rightarrow \quad = \sin(-u)$ منفی را بردار و در عوض کمان را قرینه کن. ← منفی رو بده به کمان

با بازه چه کنیم: اگر تعداد جواب‌های معادله در یک بازه، خواسته شده است:

۱) معادله را حل کن و x را پیدا کن.

۲) x را بر حسب k بذار توی محدوده.

۳) معادله را ساده کن، k رو تنها کن و محدوده‌ی k رو پیدا کن.

۴) عددهای صحیح محدوده‌ی k را اعلام کن.

سه با معادله کسری چه کنیم؟ حواستان باشد، xای که پیدا کرده‌اید باعث صفر شدن مخرج نشود! جوردیگه اگر دسته جوابی باعث صفر شدن مخرج می‌شود، حذفش کن...

**روش حل معادله مثلثاتی**

با دو نسبت هم نام مساوی باشد:

$\sin u = \sin v$ جواب‌ها $\begin{cases} u = 2k\pi + v \\ u = 2k\pi + \pi - v \end{cases}$

$\cos u = \cos v$ جواب‌ها $u = 2k\pi \pm v$

با دو نسبت غیرهم نام مساوی باشد: کمانِ یکی را متمم کن تا بشود حالت بالا.

$\sin u = \cos v \Rightarrow \sin u = \sin(\frac{\pi}{2} - v)$

$\sin u = \cos v \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2} - u) = \cos v$

معادله درجه ۲:

هر دو طرف معادله درجه ۲ داریم:

$a\sin^2 u + b\sin u + c = 0$

$a\cos^2 u + b\cos u + c = 0$

با روش $\Delta$ حل کن و سینوس یا کسینوس را پیدا کن...

با این بعضی معادله درجه ۲ می‌شود:

$\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$

$\cos^2 u = 1 - \sin^2 u$

$\cos 2u = 1 - 2\sin^2 u$

$\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$



Scanned by CamScanner

فصل ۱۰ - حد و پیوستگی



# فصل در یک نگاه

## بخش‌پذیری و تقسیم

- فرمِ الگوریتم تقسیم: $f(x)=g(x)\,q(x)+r(x)$
  - اساسی: باقی‌مانده + خارج‌قسمت × مقسوم‌علیه = مقسوم
  - درجه‌ها:
    - مقسوم: $m$
    - مقسوم‌علیه: $n$ طوری‌که $n<m$
    - خارج‌قسمت: $m-n$
    - باقی‌مانده: حداکثر $n-1$
- باقی‌مانده صفر شد (اسم خاص) $f(x)$ بر $g(x)$ بخش‌پذیر است.
- پیداکردن باقی‌مانده
  - باقی مانده‌ی $f(x)$ بر $ax+b$ می‌شود $r=f(-\frac{b}{a})$ (فارسی) ریشه‌ی مقسوم‌علیه را بذار توی مقسوم...
  - شرط بخش‌پذیریِ $f(x)$ بر $ax+b$ می‌شود $f(-\frac{b}{a})=0$
- ارتباط عامل‌ها و عبارت: اگر $x=a$ یک ریشه‌ی عبارت $f(x)$ باشد
  - یک عاملِ $f(x)$: می‌شود $x-a$
  - عامل‌های دیگرِ $f(x)$ (روش‌یافتن) $f(x)$ را بر $x-a$ تقسیم کن.
  - معنای عامل: $f(x)$ بر آن بخش‌پذیر است...

## تعمیم اتحاد چاق و لاغر

- صورت اتحاد
  - $n$ طبیعی: $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$
  - $n$ فرد و طبیعی: $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+b^{n-1})$
- ویژگی‌های اتحاد
  - مجموع توان‌هایِ $a$ و $b$ داخل پرانتزِ چاق در هر جمله $n-1$ است.
  - علامت ضریبِ جملات چاق در $a^n+b^n$ زمانی که توانِ $b$ فرد است، منفی می‌شود.
  - به شکل بخش‌پذیری
    - $a^n-b^n$ برای هر $n$ طبیعی بر $a-b$ بخش‌پذیر است.
    - $a^n+b^n$ برای هر $n$ طبیعی و فرد بر $a+b$ بخش‌پذیر است.
  - حالت خاص
    - $n$ طبیعی: $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}+\cdots+1)$
    - $n$ طبیعیِ فرد: $a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+a^{n-3}-\cdots+1)$
  - کاربرد در گویا کردن و حذف رادیکال در حد
    - $n$ طبیعی: $(\sqrt[n]{x}-1)(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+\sqrt[n]{x^{n-3}}+\cdots+1)=x-1$
    - $n$ طبیعی و فرد: $(\sqrt[n]{x}+1)(\sqrt[n]{x^{n-1}}-\sqrt[n]{x^{n-2}}+\sqrt[n]{x^{n-3}}-\cdots+1)=x+1$
- حالت کلیِ رادیکال
  - $n$ طبیعی: $(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\sqrt[n]{a^{n-3}b^2}+\cdots+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a-b$
  - $n$ طبیعیِ فرد: $(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\sqrt[n]{a^{n-3}b^2}-\cdots+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a+b$



Scanned by CamScanner

## مفاهیم اولیه‌ی حد

### میل کردن

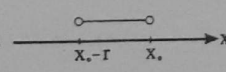
- از سمت راست
  - نماد: $x \to a^+$
  - مفهوم: $x > a$ و البته بسیار نزدیک به $a$.
- از سمت چپ
  - نماد: $x \to a^-$
  - مفهوم: $x < a$ و از هر چه فکر کنید به $a$ نزدیک‌تر است ...!
- دو طرفه
  - نماد: $x \to a$
  - مفهوم: $x \to a^+$ یا $x \to a^-$

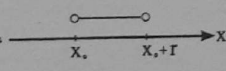
در هر سه حالت $x \neq a$

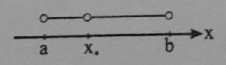
- وضعیتِ $-x$
  - اگر $x \to a^+$ آن‌وقت $-x \to (-a)^-$
  - اگر $x \to a^-$ آن‌وقت $-x \to (-a)^+$

مقدار $x$ را قرینه کن و علامت همسایگی را عوض کن.

### همسایگی

- تعریف: بازه‌ی بازِ شاملِ $x_0$ را همسایگیِ $x_0$ می‌گوییم. $x_0$ همسایگیِ $(a,b) \to x_0 \in (a,b)$
- انواع همسایگی
  - همسایگی چپ $x_0$
    - فرم: $(x_0 - r, x_0)$؛ پایان بازه $x_0$ است.
    - شکل: 

    ، بازه‌ای شامل اعداد کوچک‌تر از $x_0$.
  - همسایگی راست $x_0$
    - فرم: $(x_0, x_0 + r)$؛ شروع بازه $x_0$ است.
    - شکل: 

    ، بازه‌ای شامل اعداد بزرگ‌تر از $x_0$.
  - همسایگی محذوف $x_0$
    - فرم
      - $(a,b) - \{x_0\}$
      - $(a,x_0) \cup (x_0,b)$
    - مفهوم: هم اعداد کوچک‌تر از $x_0$ در آن هستند و هم بزرگ‌تر، ولی خودِ $x_0$ نیست.
    - شکل: 

- اگر گفتند بازه‌ی $(a,b)$ همسایگیِ
  - چپِ $x_0$ است؛ آن‌وقت: $a < x_0 , b = x_0$
  - راستِ $x_0$ است، آن‌وقت: $b > x_0 , a = x_0$
  - $(a,b) \cup (c,d)$ همسایگی محذوف $x_0$ است، آن‌وقت $b = c = x_0$ و $a < x_0 < d$



Scanned by CamScanner

## مقدماتِ حد تابع در $x \to a$

- **وجود حدِ f در $x \to a$**
  - **شرایط**
    - ① f در سمت چپ و راستِ a تعریف شده باشد.
    - ② حد چپ و راست f در همسایگی a مساوی باشد.
  - **به ریاضی:** $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ و سمت چپ و راستِ $x = a$ در تابع، خالی نباشد.
  - **روی نمودار:** در نقطه‌ی $x = a$ تابع، پرش نداشته باشد و یک سمتِ آن هم خالی نباشد.
  - **یافتن حدها:** روی محور x ها، و سمت چپ و راستِ a علامتِ کوچکی بزن و بعد عرضِ این علامت‌ها را روی تابع پیدا کن...
- **حد و مقدار:** حدِ تابع در $x = a$، با مقدار تابع در این نقطه هیچ ربطی به هم ندارند!
  - **مقدار**
    - **نماد:** $f(a)$
    - **روی شکل:** نقطه‌ی تُوپر روی تابع به ازای $x = a$ (در صورت وجود)
- **حفره**
  - **شکل:**
  - **مفهوم و کاربرد:** اگر تابع کسری در $x = a$ حفره داشته باشد، $x = a$ ریشه‌ی مشترکِ صورت و مخرج بوده است.
- **قوانین حد**

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = m \end{cases}$$

آن‌وقت برای $x \to a$ حدِ

- **جمع و منها:** $f \pm g = \ell \pm m$
- **ضرب:** $fg = \ell m$
- **تقسیم:** $\frac{f}{g} = \frac{\ell}{m}$ $(m \neq 0)$
- **توان:** $f^k = \ell^k$ $(k \in \mathbb{N})$

## تابع‌های چالش‌دار در حد

- **تابع قطعه‌ای**
  - $f(x) = \begin{cases} x > a \\ x < a \end{cases}$
    - حد راست از شاخه‌ای که مقابلش $x > a$ دارد، حساب می‌شود.
    - حد چپ از شاخه‌ای که مقابلش $x < a$ دارد، حساب می‌شود.
    - $x = a$ در هر شاخه‌ای باشد، برای حدِ تابع مهم نیست!
  - $f(x) = \begin{cases} x \neq a \\ x = a \end{cases}$
    - حد راست و چپ از شاخه‌ای که مقابلش $x \neq a$ دارد، حساب می‌شود.
  - **یه‌جوردیگه:** برای محاسبه‌ی حد تابع در a، شاخه‌ای را که $x = a$ دارد، نادیده بگیر...
- **تابع قدر مطلق در $x \to a$**
  - لازم است حد تابع را به حدهای راست و چپ، جدا کنی و هرکدام را جداگانه حساب کنی.
  - $x = a$، داخل قدرمطلق را صفر نمی‌کند ← عددگذاریِ معمولی کن
  - $x = a$، داخل قدرمطلق را صفر می‌کند ← ابهام $\frac{0}{0}$ دارد ← حد چپ و راست را جداگانه حساب کن.
  - **روش رفع چالش:** عبارت را تعیین علامت کنید و به‌طور مناسب از قدرمطلق خارج کنید.
  - **ریاضی:** $|u| = \begin{cases} u & u > 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$



Scanned by CamScanner

فصل ۱۰ - حد و پیوستگی

- تابع براکتی در $x \to a$
  - $x = a$، داخل براکت را عددی صحیح نمی‌کند ← عددگذاری معمولی کن.
  - $x = a$، داخل براکت را عددی صحیح می‌کند ← حد راست و چپ را جداگانه حساب کن.
  - روش رفع چالش
    - برای $x \to a^+$ به $x$، عددی کوچک اضافه کن و بعد جای‌گذاری کن.
    - برای $x \to a^-$ از $x$، عددی کوچک کم کن و بعد جای‌گذاری کن.
    - $\boxed{x \to a^+ \Rightarrow x \simeq a + 0/001}$
    - $\boxed{x \to a^- \Rightarrow x \simeq a - 0/001}$
  - تابع معروف $[kx]$
    - $x \to a^+$
      - $k > 0$ حدش می‌شود $\boxed{ka}$
      - $k < 0$ حدش می‌شود $\boxed{ka - 1}$
    - $x \to a^-$
      - $k > 0$ حدش می‌شود $\boxed{ka - 1}$
      - $k < 0$ حدش می‌شود $\boxed{ka}$
    - $x \to a$ و $ka \in \mathbb{Z}$ $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ حد ندارد
- $\boxed{\underset{x \to a}{f(x)} = \frac{\bigcirc \neq 0}{x - a}}$ مخرج باید با توجه به حد چپ و راست تعیین علامت شود...

**محاسبه‌ی حد تابعِ مبهم**

- مسیر اصلی: تابع در $x \to a$ چالش دارد؟
  - بله: چالش را رفع کن، تابع بدون قدرمطلق و جزء صحیح باشد...
  - خیر: عددگذاری کن $\xrightarrow{\text{ابهام $\frac{0}{0}$ دارد؟}}$
    - بله: ابهام را رفع کن.
    - خیر: تمام است، جواب حد در آمده...
- $\frac{0}{0}$ جبری
  - عاملِ $x - a$ را در صورت و مخرج ایجاد کن و ساده کن $\xrightarrow{\text{روش‌ها}}$
    - ① اتحادها و فاکتور
    - ② تقسیمِ صورت و مخرج بر $x - a$ و گذاشتن خارج قسمتِ تقسیم به جای هر کدام
  - هوپیتال بزن
    - ریاضی: $\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f}{g} = \lim_{x \to a} \frac{f'}{g'}}$
    - فارسی: به‌جای صورت، مشتق آن و به جای مخرج هم مشتق آن را بذار و بعد عددگذاری کن.
- $\frac{0}{0}$ رادیکالی
  - ضربِ لنگه‌ی مناسب
    - برای $\sqrt{x} \mp \sqrt{a}$، مزدوجش یعنی $\sqrt{x} \pm \sqrt{a}$ را در صورت و مخرج ضرب کن.
    - برای $\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{a}$، عبارتِ $\sqrt[3]{x^2} \mp \sqrt[3]{xa} + \sqrt[3]{a^2}$ را در صورت و مخرج ضرب کن.
    - برای $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}$، عبارت $\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}a} + \sqrt[n]{x^{n-3}a^2} + \cdots + \sqrt[n]{a^{n-1}}$ را در صورت و مخرج ضرب کن.
  - اتحادی که استفاده می‌شود
    - برای فرجه دو: $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$
    - برای فرجه سه: $\boxed{(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3}$
    - برای فرجه $n$: $\boxed{(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}) = a^n - b^n}$
  - روشِ با مشتق: هوپیتال بزن... $\boxed{\sqrt[n]{u} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}}$



Scanned by CamScanner

فصل ۱۰ - حد و پیوستگی



- $\frac{0}{0}$ مثلثاتی
  - عامل صفرکننده را ایجاد کن و از صورت و مخرج خط بزن ← مهم‌ترین اتحادها
    - $\sin^2 u = 1-\cos^2 u = (1-\cos u)(1+\cos u)$
    - $\cos^2 u = 1-\sin^2 u = (1-\sin u)(1+\sin u)$
    - $\sin^3 u \pm \cos^3 u = (\sin u \pm \cos u)(1 \mp \sin u \cos u)$
    - طلایی
      - $1+\cos u = 2\cos^2 \frac{u}{2}$
      - $1-\cos u = 2\sin^2 \frac{u}{2}$
    - $2\alpha$: $\sin 2u = 2\sin u \cos u$
  - استفاده از هم‌ارزی
    - وقتی $0 \to$ کمان
    - برای سینوس: $\sqrt[n]{\sin^m u} = \sqrt[n]{u^m}$
    - برای کسینوس: $\sqrt[n]{\cos^m u} = 1-\frac{u^2 m}{2n}$

## حد نامتناهی

- مفاهیم
  - تعریف: حد نامتناهی، یعنی جوابِ حد تابع برابر $+\infty$ یا $-\infty$ شود: $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$
  - تعبیر فارسی
    - $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ؛ در همسایگی a، مقدار تابع از هر چه فکر کنید بیشتر است...
    - $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ ؛ در همسایگی a، مقدار تابع منفی و عدد آن بسیار بزرگ است...
- قوانین
  - چه حدی، نامتناهی می‌شود: کسری که صورتش غیرصفر و مخرجش حدِ صفر داشته باشد: $\lim_{x\to a} \frac{\text{عددغیرصفر}}{\text{صفر}} = \infty$
  - محاسبه‌ی حد نامتناهی: مخرج کسر را تعیین علامت کن
    - جبری‌ها ← جدول تعیین علامت
    - مثلثاتی‌ها ← ببین x در کدام ناحیه می‌افتد
    - صورت کسر مثبت است
      - $\frac{\text{ابر}}{0^+} = +\infty$
      - $\frac{\text{ابر}}{0^-} = -\infty$
    - صورت کسر منفی است
      - $\frac{\text{ابر}}{0^+} = -\infty$
      - $\frac{\text{ابر}}{0^-} = +\infty$
    - مخرج همواره مثبت است
      - فقط علامت صورت و ضریب مهمه! مخرج تعیین علامت نمی‌خواد
      - جبری‌ها
        - $\frac{\text{ابر}}{|u|}$
        - $\frac{\text{ابر}}{u^{2k}}$
        - $\frac{\text{ابر}}{\sqrt[2k]{u}}$
        - $\Delta$ مخرج صفره...
      - مثلثاتی‌ها
        - $1 \pm \sin u \geq 0$
        - $1 \pm \cos u \geq 0$
    - علامت مخرج معلومه ← باعلامت a



Scanned by CamScanner

ریخت‌شناسی

◂ حد یک‌طرفه نامتناهی شود

- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

◂ هر دو حدِ راست و چپ نامتناهی می‌شوند

- حد راست و چپ هر دو $+\infty$
- حد راست و چپ هر دو $-\infty$

انفصال مضاعف

- حد راست $+\infty$ و حد چپ $-\infty$
- حد راست $-\infty$ و حد چپ $+\infty$

## کسر در همسایگیِ a در کنکور

وضعیت $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ell}{m}$

- حد صورت و مخرج صفر است ← رفع ابهام کن: $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}=\text{مبهم}$
- فقط مخرج صفر است ← حد نامتناهی است ← مخرج را تعیین علامت کن: $\frac{\text{غیرصفر}}{\text{صفر}}=\infty$
- مخرج صفر نیست ← عددگذاری معمولی کن: $\frac{\text{هرعددی}}{\text{غیرصفر}}=\text{عدد}$

کسرِ نامتناهی معروف

شرایط

- مخرجش عبارتی درجه‌ی دو است: $\frac{\quad}{ax^2+bx+c}$
- x به‌صورت یک‌طرفه به عددی میل نمی‌کند؛ همسایگیِ x راست و چپ ندارد! $x\to m$
- جوابِ حد، شده $+\infty$ یا $-\infty$. $\lim\limits_{x\to m}\frac{\quad}{ax^2+bx+c}=\pm\infty$

نتیجه‌گیری

- مفهومی: $x=m$ ریشه‌ی مضاعف مخرج بوده است.
- اجرا در تست
  - $-\frac{b}{a}=2m$
  - $\frac{c}{a}=m^2$



Scanned by CamScanner

فصل ۱۰ حد و پیوستگی



## حد در بی‌نهایت

**مفاهیم**

- $x \to +\infty$ یعنی $x$ عدد مثبتِ خیلی بزرگی است. لازمه تابع در بازه‌ی $(+\infty, \quad)$ تعریف شده باشد.
- $x \to -\infty$ یعنی $x$ عددِ منفی است ولی قدر مطلقش بزرگ است. لازمه تابع در بازه‌ی $(-\infty, \quad)$ تعریف شده باشد.

**جواب حد تابع در بی‌نهایت**

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\ell$ ، $f(x)$ می‌تواند به هر مقدار که بخواهید به $\ell$ نزدیک شود به شرطی که $x$ را به اندازه‌ی کافی بزرگ کرده باشید.
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ ، با بزرگ شدنِ $x$ ، مقدار تابع هم بزرگ می‌شود...
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=$ تعریف نشده ، دامنه‌ی تابع از دو طرف محدود بوده است.

**روش محاسبه**

- حد بی‌نهایت فقط در مخرج: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{k}{x^r}=0 \quad (r>0)$
- روش استفاده: به جای هر عبارتِ جبری، فقط جمله‌ای که بزرگ‌ترین توان را دارد با ضریبش نگه‌دار و بقیه را حذف کن...

$$ax^n+bx^{n-1}+\cdots \xrightarrow{x\to\infty} ax^n$$

- پرتوان
  - کجا قابل استفاده است: چند جمله‌ای در موقعیتِ $x\to\infty$
    - توان: $2x^2+x=2x^2$
    - پایه: $(x^2+x)^3=(x^2)^3$
    - زیر رادیکال: $\sqrt{x^2+x}=\sqrt{x^2}$
    - توی قدرمطلق: $|x^2+x|=|x^2|$
  - چند جمله‌ای کنارِ رادیکال: $ax^m+\sqrt[n]{bx^p+\cdots}$ $\xrightarrow{x\to\infty}$
    - می‌شود $ax^m$ ، اگر $\frac{p}{n}<m$
    - می‌شود $\sqrt[n]{bx^p}$ ، اگر $\frac{p}{n}>m$

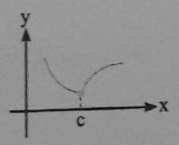
**برای عبارت گویا:** در کسری که صورت و مخرج چند جمله‌ای هستند، با شرط

- درجه‌ی مخرج < درجه‌ی صورت ← جواب حد می‌شود: بی‌نهایت
- درجه‌ی مخرج = درجه‌ی صورت ← جواب حد می‌شود: ضریبِ پر توانِ صورت به ضریبِ پر توانِ مخرج
- درجه‌ی مخرج > درجه‌ی صورت ← جواب حد می‌شود: صفر

## پیوستگی

**در نقطه $x=c$**

- روی نمودار: اگر از کمی قبلِ $x=c$ روی تابع به سمتِ کمی بعد آن حرکت کنیم، مجبور به برداشتن قلم از روی کاغذ نشویم...




- به زبان ریاضی: حد چپ و راست و مقدار مساوی باشند: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

**در بازه‌ی...**

- $(a,b)$: تابع در محدوده‌ی $x$ های این بازه هیچ نقطه‌ی ناپیوستگی ندارد:
- $[a,b)$: در $(a,b)$ پیوسته است و در $a$ پیوستگی راست دارد:
- $(a,b]$: در $(a,b)$ پیوسته است و در $b$ پیوستگی چپ دارد:
- $[a,b]$: در $(a,b)$ پیوسته است و در $a$ پیوستگی راست دارد و در $b$ پیوستگی چپ دارد:



Scanned by CamScanner

**انواع پیوستگی**

- راست: حد راست و مقدار مساوی‌اند: $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=f(c)$
- چپ: حد چپ و مقدار مساوی‌اند: $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=f(c)$
- کامل: حد راست و چپ و مقدار هر سه تا مساوی‌اند: $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=f(c)$

**روی $\mathbb{R}$**

- تابع کسری است ← شرط ← $\Delta$ مخرج را کوچک‌تر از صفر قرار دهید: $\frac{\bigcirc}{u} \xrightarrow{\text{همواره پیوسته}} \Delta_u<0$
- تابع رادیکالی است ← شرط ← زیر رادیکالِ فرجه‌ی زوج را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهید: $\sqrt[2k]{u} \xrightarrow{\text{همواره پیوسته}} u\geq 0$
- تابع چند ضابطه‌ای است ← شرط ← شرط پیوستگی را برای تمامِ نقطه‌های شکست دامنه بنویس...

$$y=\begin{cases} f(x) & x>c \\ g(x) & x\leq c \end{cases} \xrightarrow{\text{همواره پیوسته}} f(c)=g(c)$$

**تابع در این نقطه تعریف نشده**

- کسرها روی ریشه‌ی مخرج خود: مثل $y=\frac{x}{x+1}$ در $x=-1$.
- مثلثاتی‌ها:
  - $\tan u$ هر جا که $u=k\pi+\frac{\pi}{2}$ شود.
  - $\cot u$ هر جا که $u=k\pi$ شود.
- تابع لگاریتمی: $y=\log u$ وقتی $u=0$ شود. مثل $y=\log(x+1)$ در $x=-1$.

**این نقطه ابتدا یا انتهای بازه است (شروع و پایان دامنه)**

- اگر برای $x$ محدوده داده‌اند: یا
- $y=\sqrt{ax+b}$ در ریشه‌ی زیر رادیکال: مثل $y=\sqrt{x+1}$ روی $x=-1$.

## حالت‌های ناپیوستگی تابع در نقطه‌ی $x=c$

**این نقطه حفره‌ی تابع است**

- مفهوم: تابع در این نقطه حد دارد ولی مقدارش یا وجود ندارد یا با حدها مساوی نیست.
- شکل: یا
- کجا اتفاق می‌افتد:
  - در کسری که $x=c$ ریشه‌ی مشترک صورت و مخرج است.
  - در تابع چند ضابطه‌ای که $x=c$ یک شاخه‌ی مجزا باشد، از این حالت بترسید...!

$$y=\begin{cases} f(x) & x>c \\ g(x) & x<c \\ k & x=c \end{cases} \quad \text{یا} \quad y=\begin{cases} f(x) & x\neq c \\ k & x=c \end{cases}$$

**تابع براکتی:** $y=[ax]$ در نقاطی با فرم $x=\frac{k}{a}\ (k\in\mathbb{Z})$ ناپیوسته است.

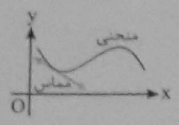


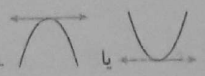
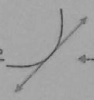
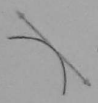
Scanned by CamScanner

# فصل در یک نگاه

## مماس

- **تعریف:** خطی بر منحنی مماس است که
  - ۱) تنها یک نقطه‌ی مشترک با منحنی داشته باشد و در همسایگی آن نقطه تابع را قطع نکند!
  - ۲) در نقطه‌ی تماس، منحنی نقطه‌ی گوشه‌ای نشود.
  - ۳) نقطه‌ی تماس خط و منحنی عضو دامنه‌ی $f$ باشد (توخالی نباشد).




- **انواع مماس**
  - مماس افقی ← وضعیت: موازی محور $x$ ها با شیب صفر ← شکل:  یا  ← مشتق: $f' = 0$
  - مماس قائم ← وضعیت: موازی محور $y$ ها با شیب $\pm\infty$ ← شکل: یا ← مشتق: $f' = \pm\infty$
  - مماس مایل ← وضعیت: نه موازی محور $x$ ها و نه موازی محور $y$ ها ← شکل:  ← مشتق: عددی حقیقی و غیرصفر
    - مشتق مثبت
    - مشتق منفی 

- **نیم‌مماس**
  - نیم‌مماس راست: سمت راستِ نقطه، یک نیم‌خطِ مماس بکش ← نماد مشتق: $f'_+(c) =$ شیب نیم‌مماس راست ← شکل:
  - نیم‌مماس چپ: سمت چپِ نقطه، یک نیم‌خطِ مماس بکش ← نماد مشتق: $f'_-(c) =$ شیب نیم‌مماس چپ ← شکل:

- **خط مماس**
  - **شیب:** در هر نقطه می‌شود مشتق در آن نقطه
    - ریاضی: شیب مماس در نقطه‌ای به طول $a$ روی منحنی $= f'(a)$
    - نموداری: $m_{\text{مماس}} \xrightarrow{} f' \xrightarrow{} a$
    - نحوه‌ی اجرا: از تابع مشتق بگیر و به جای $x$ های آن بذار $a$، این می‌شود $f'(a)$ یا شیب مماس.
  - **معادله‌ی مماس**
    - فرمول: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ ← حالت خاص $f'(a) = \pm\infty$ ← $x = a$
    - نحوه‌ی اجرا: $x = a$ را به
      - خود تابع بده ← دریافتی ← $f(a)$
      - مشتق تابع بده ← دریافتی ← $f'(a)$

      ← جای گذاری ← فرمول بالا...

## مفاهیم ابتدایی مشتق

- **تعریف مشتق در $a$**
  - در همسایگیِ صفر: $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
  - در همسایگیِ خود $a$: $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$
  - حدِ $f$ دار: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+mh) - f(a+nh)}{kh} = \dfrac{m-n}{k} f'(a)$
- **ارتباط با مماس:** مشتق در نقطه‌ی $x = a$، همان شیب مماس بر تابع در نقطه‌ای با طول $a$ است...
- **وجود مشتق**
  - تابع در $x = a$ پیوسته باشد.
  - جوابِ تعریف مشتق، عددی حقیقی و متناهی باشد.

  ← هندسی ← بتوان در $x = a$ یک خط مماسِ غیر قائم بر تابع کشید.



Scanned by CamScanner

## مشتق‌گیری

- **در چه تابعی از تعریف مشتق استفاده کنیم**
  - $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\neq a \\ k & x=a \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{در } x=a}$ $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-k}{x-a}$
  - $f(x)=(x-a)g(x)$
    - با تعریف: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)g(x)-0}{x-a}$
    - راه تستی: $x-a$ را نادیده بگیر و حدِ $g$ را در همسایگی $a$ پیدا کن $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}g(x)$
- **مشتق‌های یک‌طرفه**
  - مشتق راست
    - نماد: $f'_+(a)$
    - مفهوم: شیب نیم‌مماس راست در نقطه‌ای به طول $a$
    - تعریف ریاضی: $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$
  - مشتق چپ
    - نماد: $f'_-(a)$
    - مفهوم: شیب نیم‌مماس چپ در نقطه‌ای به‌طول $a$
    - تعریف ریاضی: $f'_-(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$
  - $f'_+(a)=f'_-(a)$ و $f$ در $a$ پیوسته ← شرط مشتق‌پذیری در $a$
- **مرتبه‌های بالاتر:** $f'''\xrightarrow{\text{مشتق‌بگیر}}f''\xrightarrow{\text{مشتق‌بگیر}}f'\xrightarrow{\text{مشتق‌بگیر}}f$ برای رسیدن به مشتق‌های مرتبه‌ی بالاتر، پشتِ سر هم مشتق بگیر...
- **تابع‌های بیسیک**
  - $y=x^n$ با فرضِ $n\in\mathbb{Q}$ $\xrightarrow{\text{مشتق}}$ $y'=nx^{n-1}$ $\xrightarrow{\text{حالت خاص}}$
    - ① $y=x\xrightarrow{\text{مشتق}}y'=1$
    - ② $y=k\xrightarrow{\text{مشتق}}y'=0$
  - $y=\sqrt{ax+b}$، تابع خطیِ زیر رادیکال $\xrightarrow{\text{مشتق}}$ $y'=\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$ $\xrightarrow{\text{حالت خاص}}$ $y=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{مشتق}}y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
  - $y=\sqrt[3]{ax+b}$ $\xrightarrow{\text{مشتق}}$ $y'=\dfrac{a}{3\sqrt[3]{(ax+b)^2}}$ $\xrightarrow{\text{حالت خاص}}$ $y=\sqrt[3]{x}\xrightarrow{\text{مشتق}}y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
- **قالب‌ها**
  - ضریب عددی: $mf\xrightarrow{\text{مشتق}}mf'$
  - جمع و منها: $f\pm g\xrightarrow{\text{مشتق}}f'\pm g'$
  - نتیجه: $mf\pm ng\xrightarrow{\text{مشتق}}mf'\pm ng'$
  - ضرب: $fg\xrightarrow{\text{مشتق}}f'g+g'f$ ؛ مشتق اولی در دومی + مشتق دومی در اولی
  - تقسیم: $\dfrac{f}{g}\xrightarrow{\text{مشتق}}\dfrac{f'g-g'f}{g^2}$ ؛ مشتق صورت در مخرج، منهای مشتق مخرج در صورت، تقسیم بر مجذور مخرج...
  - هموگرافیک: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\xrightarrow{\text{حالت خاص}}$ آن‌گاه $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
- **ترکیب‌ها**
  - عبارتِ توان‌دار در حالت کلی: اگر $y=u^m$ باشد، آن‌گاه $y'=mu^{m-1}u'$
  - عبارتِ فرجه‌دار در حالت کلی: اگر $y=\sqrt[m]{u}$ باشد، آن‌گاه $y'=\dfrac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$
- **ترتیبِ عملیات:** اول ساده کردنِ ضابطه‌ی تابع، دوم مشتق‌گیری و سوم عددگذاری $f\xrightarrow{\text{ساده کن}}$ ☁ $\xrightarrow{\text{مشتق‌بگیر}}$ عدد بده
- **از تابعی که عامل صفرساز دارد:** $y=f(x)g(x)\xrightarrow{f(a)=0}y'(a)=f'(a)g(a)$ ؛ فقط از عامل صفرسازِ ضرب‌شده، مشتق بگیر و ضریب را عیناً بنویس، آخر سر عددگذاری کن...



Scanned by CamScanner

- از تابع چند ضابطه‌ای
  - شرط پیوستگی: $y=\begin{cases} f(x) & x\ge a \\ g(x) & x<a \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=\begin{cases} f'(x) & x>a \\ g'(x) & x<a \end{cases}$ ، از هر شاخه مشتق بگیر و تساوی موجود در دامنه را حلف کن.
  - $y'_+(a)=f'(a) \xrightarrow[x\ge a]{\text{مشتق راست}}$ ، $y'_-(a)=g'(a) \xrightarrow[x<a]{\text{مشتق چپ}}$ ، $y'_+(a)=y'_-(a)$
  - شرط مشتق‌پذیری: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} g(x)$ و $f'(a)=g'(a)$
- از تابع قدرمطلق دار: عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت کنید و قدرمطلق را به‌طور مناسب بردارید ← چند ضابطه‌ای می‌شود ← مشتق بگیر:

$$y=|u|=\begin{cases} u & u\ge 0 \\ -u & u<0 \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=\begin{cases} u' & u>0 \\ -u' & u<0 \end{cases}$$

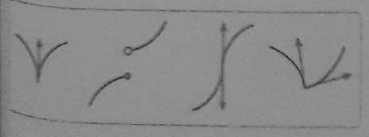
- از تابع جزء صحیح دار
  - اگر عدد داده‌شده، عبارت داخل براکت را صحیح نمی‌کند ← عددگذاری معمولی کن ← مشتق بگیر
  - اگر عدد داده‌شده، عبارت داخل براکت را صحیح می‌کند ← به مشتق‌های راست و چپ تفکیک کن و جداگانه حساب کن.

- دامنه‌ی مشتق: مجموعه xهایی از دامنه‌ی f که تابع در آن‌ها پیوسته بوده و مشتق راست و چپ برابر دارد.
- ارتباط با پیوستگی
  - اگر طراح گفت f در $x=a$ مشتق‌پذیر است، نتیجه بگیر پیوسته هم بوده است.
  - اگر f در نقطه‌ی a ناپیوسته باشد، حتماً مشتق‌ناپذیر است.

  یادت باشه ← وجود حد، پیوستگی، مشتق‌پذیری

## مشتق‌ناپذیری

- گاندیداهای مشتق‌ناپذیری
  - تابع کسری: روی ریشه‌ی مخرج قطعاً! $\frac{\bigcirc}{u} \xrightarrow{\text{مشتق‌ناپذیری}} u=0$
  - تابع قدرمطلقی: روی ریشه‌ی عبارت داخل، شاید! $|u| \xrightarrow{\text{گاندید مشتق‌ناپذیری}} u=0$ ، حالت خاص ← $y=|ax+b|$ در $-\frac{b}{a}$ حتماً مشتق ندارد
  - تابع رادیکالی
    - رادیکال فرجه ۲: $\sqrt{u} \xrightarrow{\text{گاندید مشتق‌ناپذیری}} u=0$ ، حالت خاص ← $y=\sqrt{ax+b}$ در $-\frac{b}{a}$ حتماً مشتق ندارد
    - رادیکال فرجه ۳: $\sqrt[3]{(ax+b)^2(cx+d)} \xrightarrow{\text{گاندیدهای مشتق‌ناپذیری}} x=-\frac{b}{a},-\frac{d}{c}$
  - تابع قطعه‌ای
    - $y=\begin{cases} f(x) & x\ge a \\ g(x) & x<a \end{cases}$ در $x=a$ شاید مشتق‌پذیر نباشد. (شاخه‌ی $x=a$ هرجا می‌تواند باشد)
    - $y=\begin{cases} f(x) & x\ne a \\ k & x=a \end{cases}$ در $x=a$ شاید مشتق‌پذیر نباشد.
    - یادت باشه ← اول پیوستگی و بعد مشتق‌پذیری را بررسی کن...
  - تابع جزء صحیح: $y=[u]$ ، هر نقطه‌ای که $u\in\mathbb{Z}$ شود ← حالت خاص ← $[ax]$ روی نقاط $x=\frac{k}{a}(k\in\mathbb{Z})$ مشتق ندارد شاید مشتق نداشته باشد.
- ریخت‌شناسی: در نقطه‌ی مشتق ناپذیری، یا خط مماس نمی‌توان کشید یا دوتاست یا عمودی است:





Scanned by CamScanner

- مشتق‌پذیری روی بازه
  - $(a,b)$: در تمام نقاط بازه پیوسته بوده و در این بازه هیچ نقطه‌ی مشتق‌ناپذیری نداشته باشد.
  - $[a,b)$: روی $(a,b)$ مشتق‌پذیر بوده و در $x=a$ مشتق راست هم داشته باشد.
  - $(a,b]$: روی $(a,b)$ مشتق‌پذیر بوده و در $x=b$ مشتق چپ هم داشته باشد.
  - $[a,b]$: روی $(a,b)$ مشتق‌پذیر بوده و در $x=a$ مشتق راست و در $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.
- روی $\mathbb{R}$
  - مفهوم: یعنی هیچ نقطه‌ی مشتق‌ناپذیری ندارد.
  - نحوه‌ی اجرا: حواست به دو تابع باشه
    - نقطه‌ی شکست دامنه در تابع چند ضابطه‌ای $\xrightarrow{\text{روی } \mathbb{R} \text{ مشتق دارد}}$ حد چپ و راست و مشتق چپ و راستِ نقطه‌ی مرزی را برابر بذار...
    - مخرج کسر $\xrightarrow{\text{روی } \mathbb{R} \text{ مشتق دارد}}$ $\boxed{\Delta < 0 \text{ مخرج}}$

$$y=\begin{cases} f(x) & x \geq a \\ g(x) & x < a \end{cases} \xrightarrow{\text{ریاضی}} \xrightarrow{\text{روی } \mathbb{R} \text{ مشتق دارد}} \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} g(x) \\ f'(a) = g'(a) \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{دقت کن}}$ تمامی نقطه‌های مرزی را بررسی کن

## مشتق تابع مرکب

- فرمول
  - $\boxed{y=(fog)(x) \xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} y'=g'(x)f'(g(x))}$
  - $\boxed{y=(gof)(x) \xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} y'=f'(x)g'(f(x))}$
  - $\boxed{y=(fof)(x) \xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} y'=f'(x)f'(f(x))}$
- به فارسی: از تابع سمت راستی در نقطه‌ی $a$ مشتق بگیر، ضربدر از تابع چپی مشتق بگیر در نقطه‌ی عرضِ $a$ به‌ازای اولی...
  - $\boxed{(fog)'(a)=g'(a)f'(g(a))}$
  - $\boxed{(gof)'(a)=f'(a)g'(f(a))}$
- تیپ‌بندی تست
  - $\boxed{u=g(x),\ y=f(u)}$ : $y$ تابعی از $u$ داده شده و $u$ هم عبارتی بر حسب $x$ است.
    - $y'=?$ بر حسب $x$
    - روش اول: به جای $u$ در تابع $y$، مقدارش را که بر حسب $x$ است بگذارید، حالا تابع $f$ فقط بر حسب $x$ است و آماده‌ی مشتق‌گیری.
    - روش دوم: از تابع $y$ بر حسب $u$ مشتق بگیرید و از تابع $u$ هم بر حسب $x$ و این دو عبارت را در هم ضرب کنید...
  - مشتقِ $f(u)$ $\xrightarrow{u \text{ عبارتی بر حسب } x \text{ است}}$ $\boxed{u'f'(u)}$ : مشتق کمان ضربدر مشتق تابع به ازای کمان قبلی...
  - مشتقِ $f^m(u)$ $\xrightarrow[m\in\mathbb{N}]{u \text{ عبارتی بر حسب } x \text{ است}}$ $\boxed{mf^{m-1}(u)\cdot u'\cdot f'(u)}$ : برای علاقه‌مندان به ۱۰۰٪...!



Scanned by CamScanner

«فصل ۱۲ کاربرد مشتق»

# فصل در یک نگاه

## یکنوایی و رفتار تابع

- **مفهوم:** تابع $f$ در بازه‌ی $(a,b)$
  - صعودی اکید است
    - با افزایش $x$ در بازه، $y$ های نظیر هم زیاد می‌شوند.
    - در کلِ بازه $f'>0$ و امکان دارد در تعدادی از نقاط $f'=0$ هم بشود...
  - نزولی اکید است
    - با افزایش $x$ در بازه، مقدار $y$ های آنها کمتر می‌شود.
    - در تمام بازه $f'<0$ و امکان دارد در چند نقطه از این بازه، $f'=0$ هم بشود...
  - صعودی غیراکید است
    - با افزایش $x$، $y$ ها زیاد شده و در بخشی هم تابع ثابت می‌شود.
    - $f'>0$ و حداقل در یک فاصله از این بازه، $f'=0$؛ $f'\geq 0$
  - نزولیِ غیراکید است
    - با افزایش $x$، $y$ ها کم شده و در بخشی از بازه، تابع ثابت می‌شود.
    - $f'>0$ و حداقل در یک فاصله از این بازه، $f'=0$؛ $f'\geq 0$
- **ارتباط دقیق مشتق و رفتار**
  - از مشتق به رفتارِ تابع برسیم
    - اگر $f'>0$ است، نتیجه بگیرید که تابع $f$ **صعودی اکید** بوده است.
    - اگر $f'<0$ است، نتیجه بگیرید که تابع $f$ **نزولی اکید** بوده است.
    - اگر $f'\geq 0$ است، نتیجه بگیرید که تابع $f$ **صعودی** بوده است.
    - اگر $f'\leq 0$ است، نتیجه بگیرید که تابع $f$ **نزولی** بوده است.
  - از رفتار تابع به مشتقِ آن برسیم
    - اگر $f$ **صعودی یا صعودی اکید** بوده، نتیجه بگیرید که $f'\geq 0$.
    - اگر $f$ **نزولی یا نزولی اکید** بوده، نتیجه بگیرید که $f'\leq 0$.
    - استثنایی کم کاربرد: اگر تابع چند ضابطه‌ای با شاخه‌ی ثابت یا قدرمطلق‌دار باشد، برای اکیدها مساوی نذار...
- **تعیین رفتار**
  - تابع پیوسته و بدون قدرمطلق است — روش: مشتق بگیر و آن را تعیین علامت کن و برای $f$ فلش بزن
    - جدول

| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'$ | + | 0 | − |
| $f$ | ↗ | | ↘ |

    - ریشه مضاعف: قبل و بعد ریشه‌ی مضاعف علامت عوض نمی‌شود!
  - تابع ناپیوسته است یا قدرمطلق دارد — روش: رسم کن و از مفهومِ صعودی نزولی استفاده کن.
  - تابع کسری
    - مخرج کسر ریشه ندارد — روش: مشتق
    - مخرج کسر ریشه دارد — نتیجه: قطعاً تابع یکنوا نیست — بازه‌ای داده که ریشه‌ی مخرج در آن نیست — روش مشتق
      - $f'\geq 0$ صعودی
      - $f'\leq 0$ نزولی
    - گفته شده که در یک بازه یکنوا است — روش: علامتِ مشتق را مطابقِ رفتارِ تابع تنظیم کنید و کاری کنید که ریشه‌ی مخرج در بازه‌ی داده شده نیفتد!



Scanned by CamScanner

## شناخت و معرفی نقطه‌های مهم در تابع

- **اکسترمم نسبی** $c \in D_f$
  - مینیمم نسبی: عرض نقطه‌ی c در مقایسه با عرض نقطه‌های چپ و راست آن کمتر یا مساوی است. (شکل‌ها)
  - ماکزیمم نسبی: عرض نقطه‌ی c در مقایسه با عرض نقطه‌های چپ و راست آن بیشتر یا مساوی است. (شکل‌ها)

  ↓ اکسترمم یعنی مینیمم یا ماکزیمم ↑ $c \in D_f$
- **اکسترمم مطلق**
  - مینیمم مطلق: عرض نقطه‌ی c در مقایسه با تمامی عرض‌های تابع و در کلِ دامنه از همه کمتر یا مساوی بعضی است. (نام دیگر: کمترین مقدار تابع)
  - ماکزیمم مطلق: عرض نقطه‌ی c در مقایسه با تمامی عرض‌های تابع و در کلِ دامنه از همه بیشتر یا مساوی بعضی است. (نام دیگر: بیشترین مقدار تابع)
- **بحرانی**: نقطه‌ای از درون دامنه که در آن $f' = 0$ یا $f'$ = وجودندارد
  - شناخت از روی خط مماس
    - خط مماس قابل رسم نیست.
    - دو نیم مماس می‌توان کشید.
    - مماس کشیده شده افقی یا قائم است.
  - شناخت از روی شکل
    - نقاط ناپیوستگی: یا
    - نقاط گوشه‌ای: یا
    - نقاط عطف قائم: یا
    - نقاط بازگشتی: یا
    - اکسترمم‌های مشتق‌پذیر: یا
- **اول و آخر بازه**: اگر تابع روی بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شود، اول و آخرِ آن یعنی $x = a$ و $x = b$
  - اکسترمم نسبی و بحرانی نیستند.
  - اکسترمم مطلق، شاید باشند.
- **ارتباط سه نقطه با هم** (نمودارون): بحرانی، اول و آخر بازه، اکسترمم نسبی، اکسترمم مطلق

$A(a,b)$ بحرانی یا اکسترمم باشد $\Leftarrow$ $f(a) = b$

## اکسترمم نسبی

## پیدا کردن نقطه‌های مهم از روی ضابطه

- تابع پیوسته و بی قدرمطلق است (آزمون مشتق اول): مشتق بگیر و تعیین علامت کن

| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'$ | + | 0 | − |
| $f$ | ↗ | max نسبی | ↘ |

| $x$ | | $x_1$ | |
|---|---|---|---|
| $f'$ | − | 0 | + |
| $f$ | ↘ | min نسبی | ↗ |

روی $x_0$ و $x_1$ مشتق می‌تواند صفر شود یا نشود!

- تابع ناپیوسته است یا قدرمطلق دارد (روش): رسم کن و از راه تعریف اکسترمم شناسایی کن...
- بدون تعیین علامت مشتق
  - اگر $f'(x) = (x-\alpha)^{2k}(x-\beta)^{2k-1}$ $(k \in \mathbb{N})$ باشد
    - $x = \alpha$ طولِ اکسترمم نیست!
    - $x = \beta$ طولِ اکسترمم هست!
  - اگر $f(x) = \text{عدد} + (x-m)^{2k}$ $(k \in \mathbb{N})$ باشد، در این‌صورت $x = m$ طول اکسترمم است.



Scanned by CamScanner

"فصل ۱۲ـ کاربرد مشتق"

**اکسترمم مطلق**

- تابع پیوسته است ← بازه‌ی $[a,b]$ را می‌دهد ← سید هدف ← تمام بحرانی‌ها را به اضافه‌ی $a$ و $b$ در یک جدول قرار بده و عرض همگی را پیدا کن.
  بیشترین عرض می‌شود ماکزیمم مطلق و کمترین عرض هم مینیمم مطلق.
- تابع ناپیوسته است ← رسم کن و از مفهوم اکسترمم مطلق شناسایی کن...

**بحرانی**

(۱) تابع تک ضابطه‌ای است بدون قدر مطلق و جزء صحیح ← روش ← مشتق بگیر و ساده کن، اگر یک کسر شد، آن‌گاه:

$f' = \frac{A}{B}$
- $A = 0$ ← بحرانی است ← شرط ← وجود در بازه و دامنه
- $B = 0$ ← بحرانی است ← شرط ← وجود در بازه و دامنه

$f' = \frac{A}{B}$ ← $A$ و $B=0$ ← بحرانی‌ها ← بازه ندارد ← $D = \mathbb{R}$

(۲) تابع قدر مطلقی است: $y = |u|$ ← قرار بده ← $u = 0$ / $u' = 0$ ← تمامی نقاط بحرانی به‌دست می‌آید.

(۳) تابع چند ضابطه‌ای است
- در هر شاخه‌ی آن جداگانه و با روشِ (۱) بحرانی‌ها را پیدا کن
- هر نقطه‌ی شکست دامنه، شانسِ بحرانی بودن دارد ← چک کن ← ناپیوسته، بدون مشتق، مشتق صفر یا $\infty$ ← بحرانی

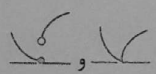
## ارتباط مشتق و اکسترمم نسبی

(۱) $f$ در $c$ پیوسته بوده و $f'$ در $c$ تغییر علامت می‌دهد
(۲) $f'(c) = 0$ و $f'$ در $c$ تغییر علامت می‌دهد

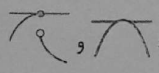
← نتیجه ← $x = c$ نقطه‌ی اکسترمم نسبی $f$ است
- آیا $f$ در $c$ مشتق دارد
  - بله ← نتیجه ← $f'(c) = 0$
  - خیر ← نتیجه ← $f'(c)$ وجود ندارد

## شناخت نقطه‌های مهم تابع روی نمودار

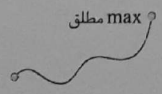
**اکسترمم نسبی:** یک خطِ افقیِ کوچک روی عرضِ نقطه بکش
- تابع بالای خط افقی کوچک بود ← نقطه را **مینیمم نسبی** اعلام کن:



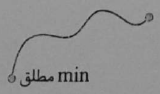
- تابع پایین خط افقی کوچک بود ← نقطه را **ماکزیمم نسبی** اعلام کن:



**اکسترمم مطلق:** نقطه‌ی توپُری که
- بالاترین نقطه‌ی نمودار است ← نتیجه ← ماکزیمم مطلق است:



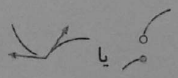

- پایین‌ترین نقطه‌ی نمودار است ← نتیجه ← مینیمم مطلق است:




**بحرانی:** خطِ مماس کشیده شده در این نقطه
- افقی است:

- عمودی است:

- بدون مماس است!





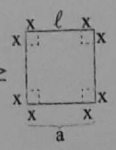
Scanned by CamScanner

## نقطه‌های مهم در تابع‌های معروف

- $y=k|ax+b|$ نقطه‌ی $x=-\frac{b}{a}$
  - با فرض $k>0$: مینیمم نسبی، مینیمم مطلق و بحرانی است.
  - با فرض $k<0$: ماکزیمم نسبی، ماکزیمم مطلق و بحرانی است.
- $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ نقطه‌ی $x=-\frac{b}{2a}$
  - با فرض $a>0$: مینیمم نسبی، مینیمم مطلق و بحرانی است.
  - با فرض $a<0$: ماکزیمم نسبی، ماکزیمم مطلق و بحرانی است.
- $y=a(bx+c)^3+d$ $(a\neq 0)$ نقطه‌ی
  - اکسترمم نسبی و مطلق ندارد.
  - $x=-\frac{c}{b}$ یا همان ریشه‌ی پرانتز نقطه‌ی بحرانی است.
- $y=a\sin(bx+c)+d$ $(a\neq 0)$
  - نقطه‌هایی با طولِ $bx+c=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$، ماکزیمم نسبی، مطلق و بحرانی است.
  - نقطه‌هایی با طولِ $bx+c=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$، مینیمم نسبی، مطلق و بحرانی است.
- $y=a\cos(bx+c)+d$ $(a\neq 0)$
  - نقطه‌هایی با طولِ $bx+c=2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$، ماکزیمم نسبی، مطلق و بحرانی است.
  - نقطه‌هایی با طولِ $bx+c=2k\pi+\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$، مینیمم نسبی، مطلق و بحرانی است.
- $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0)$ اکسترمم و بحرانی ندارد.
- $y=c\sqrt{ax+b}+d$ روی $x=\frac{-b}{a}$ یا همان ریشه‌ی زیر رادیکال
  - $c>0$: مینیمم مطلق دارد.
  - $c<0$: ماکزیمم مطلق دارد.

## بهینه‌سازی

- هدف: قرار است کمیتِ خاصی را ماکزیمم یا مینیمم کنیم؛ یافتنِ **بهترین حالت ممکن!**
- شناسایی در بین تست‌ها
  - قالبِ تست، مسئله‌ای توضیحی دارد و معمولاً ترکیبیِ با هندسه یا...
  - خواسته‌ی سؤال یکی از کلمات کلیدی **بیشترین مقدارِ** ☁ یا **کمترین مقدارِ** ☁ را دارد...
- روش حل
  1. کشیدن یک شکل
  2. پیدا کردن عبارتی که قرار است بهینه شود، نامش را P بگذارید.
  3. P را تک مجهولی کنید. روش کار استفاده از شکل و روابط هندسی و ریاضیِ حاکم بر آن یا داده‌های تست...
  4. از P تک مجهولی مشتق گرفته و مساویِ صفر بگذارید و مجهولِ قابل قبول و واقعی را پیدا کنید!
- مسائل معروف
  - ساختن جعبه

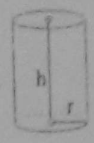
    $\xrightarrow{\text{حجم ماکزیمم شود}}$ $P=x(a-2x)^2$ $\xrightarrow{P'=0}$ $x=$ ☁
  - کوتاه‌ترین فاصله‌ی نقطه تا منحنی
    - داده‌ها: نقطه‌ی $A(a,b)$ و ضابطه‌ی تابع f
    - عبارتی که باید بهینه کنید: $P=\sqrt{(x-a)^2+(f(x)-b)^2}$
- بدون مشتق (برای $x,y>0$)
  - اگر $x+y=k$ و xy ماکزیمم باشد، باید $x=y$ شود: $\max(xy)=\frac{k^2}{4}$
  - اگر $xy=t$ و $x+y$ مینیمم باشد، باید $x=y$ شود: $\min(x+y)=2\sqrt{t}$



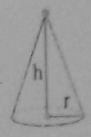
Scanned by CamScanner

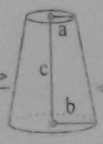
# فصل در یک نگاه

## حجم‌ها

استوانه: 

حجم ← $V = \pi r^2 h$

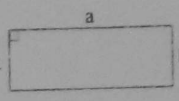
مخروط: 

حجم ← $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ← مخروط ناقص 

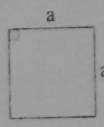
حجم ← $V = \frac{\pi c}{3}(a^2 + b^2 + ab)$

کره:
حجم ← $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

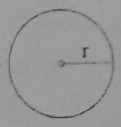
## مساحت‌ها

مستطیل: 

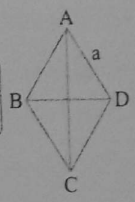
مساحت ← $S = ab$

مربع: 

مساحت ←
- بر اساس ضلع: $S = a^2$
- بر اساس قطر: $S = \frac{d^2}{2}$

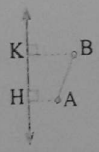
دایره: 

مساحت ← $S = \pi r^2$

لوزی: 

- بر اساس قطر: $S = \frac{AC \cdot BD}{2}$
- بر اساس ضلع: $S = a^2 \sin \hat{A}$

## ایده‌های دوران

شکل فاصله‌دار تا محور: از رأس‌ها عمود بکش بر محور دوران: 


شکل‌های متقارن نسبت به محور: نصف شکل را دوران بده...

افراز: با کشیدن خط‌های عمود بر محورِ دوران، شکل را به بخش‌هایی تقسیم کن که دوران آن‌ها را بلدی...



Scanned by CamScanner

## دوران پاره‌خط و نیم‌خط

- دوران پاره‌خط
  - شکل حاصل: دایره با شعاع AB — مساحت: $S = \pi a^2$
  - شکل حاصل: مخروط توخالی با مولد AB — حجم: $V = \frac{1}{3}\pi b^2(\sqrt{a^2 - b^2})$
  - شکل حاصل: مخروط توخالیِ سر بریده با مولد AB — ارتفاع: $h = \sqrt{a^2 - (b-c)^2}$
  - شکل حاصل: واشری به پهنای AB — مساحت: $S = \pi(a^2 - b^2)$
  - شکل حاصل: استوانه‌ی توخالی به ارتفاعِ AB — حجم: $V = \pi b^2 a$
- دوران نیم‌خط
  - شکل حاصل: مخروط توخالیِ ته‌باز
  - شکل حاصل: مخروط ناقص و ته‌باز
  - مولد = نیم‌خط
  - حجم: هر دو شکل نامحدودند و حجم ندارند...!

## دوران شکل‌های متقارن

- دایره
  - نیم‌دایره حول قطرش: شکل حاصل: کُره — حجم: $V = \frac{4}{3}\pi a^3$
  - دایره حول قطرش: شکل حاصل: کُره — حجم: $V = \frac{4}{3}\pi a^3$
  - ربع دایره حول محور گذرنده از قطرش: شکل حاصل: نیم‌کُره — حجم: $V = \frac{2}{3}\pi a^3$
- مستطیل
  - حول طولش: شکل حاصل: استوانه
    - ارتفاع a — حجم: $V = \pi b^2 a$
    - ارتفاع b — حجم: $V = \pi a^2 b$
  - حول عرضش: شکل حاصل: استوانه
    - ارتفاع a — حجم: $V = \pi b^2 a$
    - ارتفاع b — حجم: $V = \pi a^2 b$



Scanned by CamScanner

شکل حاصل استوانه حجم $V = \pi a^{۲}$

شکل حاصل دو مخروط هم قاعده‌ی متقارن حجم $V = \frac{\sqrt{۲}}{۶}\pi a^{۳}$

شکل قطبی

شکل حاصل تیوپ حجم $V = \pi a^{۲}(a+۲b)$

استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی $a+b$ که استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی $b$ درست از وسط آن درآمده...

شکل حاصل دو مخروط هم‌قاعده‌ی متقارن:

شکل حاصل تیوپ مستطیلی: استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی $a+c$ و ارتفاع $b$ که درست از وسط آن استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی $c$ و ارتفاع $b$ درآمده است...

شکل حاصل مخروط ناقصی به شعاع قاعده‌ی $b+c$ و ارتفاع $a$ که درست از وسط آن استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی $c$ و همان ارتفاع درآمده است...

شکل حاصل دو مخروط هم‌قاعده با ارتفاع‌های BH و CH $\hat{B},\hat{C}<۹۰^\circ$

از رأس مقابل محور دوران به محور عمود بکش

شکل حاصل مخروطی با ارتفاع BH که یک مخروط هم‌قاعده و با ارتفاع CH از پایین آن درآمده است... $\hat{C}>۹۰^\circ$

حجم شکل حاصل $V = \frac{۱}{۳}\pi(AH)^{۲}(BC)$

هنده: یک صفحه است.

طیر: شکلی است که پس از برخورد صفحه‌ی برش با جسم هندسی، روی شکل باقی می‌ماند.



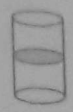
Scanned by CamScanner

# برش اشکال معروف

## استوانه

- صفحه‌ی برش موازی محور ← (سطح مقطع) ← مستطیل

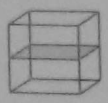
- صفحه‌ی برش عمود بر محور ← (سطح مقطع) ← دایره



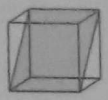
- صفحه‌ی برش، نه عمود است بر محور و نه موازیِ آن ← (سطح مقطع) ← بیضی

## مکعب‌مستطیل

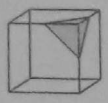
- صفحه‌ی برش موازی یکی از وجه‌هاست ← (سطح مقطع) ← مستطیل



- صفحه‌ی برش از چهار رأس غیر هم‌صفحه می‌گذرد. ← (سطح مقطع) ← مستطیل



- صفحه‌ی برش، هر سه ضلعِ هم‌رأس مکعب‌مستطیل را قطع می‌کند. ← (سطح مقطع) ← مثلث



## مخروط

### مخروط

- صفحه‌ی برش بر محور عمود است. ← (سطح مقطع) ← دایره

- صفحه‌ی برش، شامل محور است. ← (سطح مقطع) ← مثلث

(غیر این دو حالت) ← بیضی می‌شود:

### مخروط ناقص

- صفحه‌ی برش بر محور عمود است. ← (سطح مقطع) ← دایره

- صفحه‌ی برش شامل محور است. ← (سطح مقطع) ← ذوزنقه

(غیر این دو حالت) ← بیضی می‌شود:

### حالت خاص

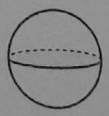
- صفحه فقط از رأس بگذرد. ← (سطح مقطع) ← نقطه

- صفحه فقط از مولد بگذرد. ← (سطح مقطع) ← خط

## کُره

- صفحه‌ی برش بر کره مماس باشد. ← (سطح مقطع) ← نقطه

- صفحه‌ی برش بر کره مماس نباشد. ← (سطح مقطع) ← دایره



(حالت خاص) ← صفحه از مرکز بگذرد ← دایره بزرگه: $S=\pi R^2$

- رابطه‌ی طولی: صفحه‌ی برش با فاصله‌ی $h$ از مرکز کره به شعاع $R$ بگذرد، مساحتِ دایره‌ی حاصل می‌شود: $\pi(R^2-h^2)$



Scanned by CamScanner

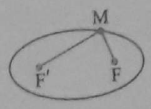
## مقاطع مخروطی

- سطح مخروطی: خط d، حول خط ثابت l دوران می‌کند.
- شکل: دوتا مخروط تو خالی بی‌انتها که از رأس، روی هم قرار دارند...

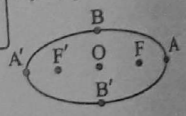
- مقطع مخروطی: اثر برش صفحه با سطح مخروطی است.
- برش سطح مقطع
  - حالت خاص: صفحه از رأس بگذرد
    - نقطه: صفحه فقط از رأس می‌گذشته...
    - خط: صفحه شامل مولد است...
    - دو خط متقاطع: صفحه شامل محور است...
  - شکل مقاطع مخروطی (صفحه از رأس نگذرد)
    - دایره: صفحه بر محور عمود است.
    - بیضی: صفحه بر محور عمود نیست ولی موازی مولد هم نیست.
    - سهمی: صفحه موازی مولد است.
    - هذلولی: صفحه موازی محور است.

## شناخت بیضی

- تعریف بیضی: مجموعه‌ی نقاطی است مانند M، به‌طوری که $MF + MF' = ۲a$ ، $a \in \mathbb{R}^+$




- کشیدن بیضی با نخ
  - طول نخ = ۲a
  - فاصله‌ی دو میخ = ۲c
- پارامترها
  - فاصله‌ی دو رأس کانونی = $AA' = ۲a$
  - فاصله‌ی دو رأس ناکانونی = $BB' = ۲b$
  - فاصله‌ی دو کانون = $FF' = ۲c$




- محورهای تقارن: $O(\alpha, \beta)$ — $x = \alpha$ ، $y = \beta$
- رابطه‌ی پارامترها: $a^۲ = b^۲ + c^۲$
- بزرگ‌ترین پارامتر: a
- مرکز بیضی $O = \frac{A + A'}{۲} = \frac{F + F'}{۲} = \frac{B + B'}{۲}$

## خروج از مرکز

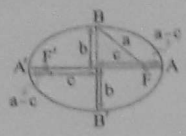
- فرمول اصلی: $e = \frac{c}{a}$
- محدوده: $۰ < e_{\text{بیضی}} < ۱$
- مفهوم: هرچه e به ۱ نزدیک‌تر شود بیضی کشیده‌تر می‌شود و هر چه به صفر نزدیک‌تر شود، تُپل‌تر!
- فرمول دوم: $e = \sqrt{۱ - \frac{b^۲}{a^۲}}$ $\xrightarrow{\text{کاربرد}}$ $e = \sqrt{۱ - (\frac{\text{قطر کوچک}}{\text{قطر بزرگ}})^۲}$



Scanned by CamScanner

## روابط طولی در بیضی

- فاصله‌ی
  - هر کانون تا رأس ناکانونی = $a$ مثل $BF$
  - هر کانون تا رأس کانونی مجاور (نزدیک‌تر) = $a-c$ مثل $AF$
  - هر کانون تا رأس کانونی غیرمجاور (دورتر) = $a+c$ مثل $AF'$



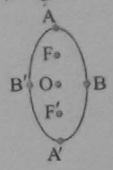

در یک نگاه

- وتر کانونی ← $MN = \frac{2b^2}{a}$

## مختصات نقاط مهم بیضی

- نوشتن مختصات
  - بیضی افقی
    - $F,F'(\alpha \pm c,\beta)$ ← فارسی ← مرکز را بچین و به اندازه‌ی $c$ به چپ و راست حرکت کن.
    - $A,A'(\alpha \pm a,\beta)$ ← فارسی ← مرکز را بچین و به اندازه‌ی $a$ به چپ و راست حرکت کن.
    - $B,B'(\alpha,\beta \pm b)$ ← فارسی ← مرکز را بچین و به اندازه‌ی $b$ به بالا و پایین حرکت کن.

  - بیضی قائم
    - $F,F'(\alpha,\beta \pm c)$ ← فارسی ← مرکز را بچین و به اندازه‌ی $c$ به بالا و پایین حرکت کن.
    - $A,A'(\alpha,\beta \pm a)$ ← فارسی ← مرکز را بچین و به اندازه‌ی $a$ به بالا و پایین حرکت کن.
    - $B,B'(\alpha \pm b,\beta)$ ← فارسی ← مرکز را بچین و به اندازه‌ی $b$ به چپ و راست حرکت کن.




- دریافت اطلاعات از مختصات
  - $F',F$
    - وسطشان می‌شود $O$
    - فاصله‌شان می‌شود $2c$
  - $A',A$
    - وسطشان می‌شود $O$
    - فاصله‌شان می‌شود $2a$
  - $B',B$
    - وسطشان می‌شود $O$
    - فاصله‌شان می‌شود $2b$

## درون و بیرون بیضی

- اگر نقطه‌ی $M$
  - روی بیضی باشد: $MF+MF'=2a$
  - درون بیضی باشد: $MF+MF'<2a$
  - بیرون بیضی باشد: $MF+MF'>2a$

روش ← فاصله‌ی $M$ را تا دو کانون حساب کرده و جمع کن و بعد حاصل را با $2a$ مقایسه کن...!

## شناخت دایره

- تعریف: مجموعه‌ی نقاطی است مانند $M$، به‌طوری که فاصله‌شان تا نقطه‌ی ثابتِ $O$ (مرکز) برابر $r$ (شعاع) باشد. $(r>0)$
- معادله‌ی استاندارد
  - نوشتن معادله: اگر $O(\alpha,\beta)$، مرکز و $r$ شعاع باشد، آن‌وقت: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$
  - دریافت اطلاعات از معادله: اگر ضریب پرانتزها و متغیرها یک بود
    - پرانتزها را صفر کن و ریشه‌ها را پیدا کن ← مرکز
    - از عددِ سمتِ راست، جذر بگیر ← شعاع

$(\quad)^2+(\quad)^2=k$

Scanned by CamScanner

**معادله‌ی گسترده**

- دریافت اطلاعات: ضریب $x^2$ و $y^2$ را با تقسیم طرفین تساوی، ۱ کن و همه‌ی جمله‌ها رو بیار سمت چپ.

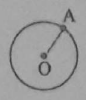
$$\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0}$$ ← فرم آماده

- فرم آماده
  - مرکز: $\boxed{O(\frac{a}{-2},\frac{b}{-2})}$
  - شعاع: $\boxed{r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}}$
- شرط دایره بودن
  - شرط لازم: $\boxed{\text{ضریب } x^2 = \text{ضریب } y^2}$
  - شرط مکمل: معادله را آماده کن و شعاع را پیدا کن ← حتماً ← عدد زیر رادیکال مثبت باشد.

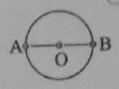
$$\boxed{a^2+b^2-4c>0}$$ ← فرم ریاضی

## نوشتن معادله‌ی دایره با اطلاعات معلوم

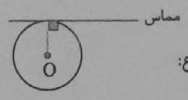
- مرکز و نقطه: فاصله‌ی مرکز را تا نقطه پیدا کن، می‌شود شعاع:



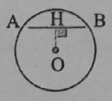

- دو سر قطر $\boxed{A,B}$
  - $\boxed{O=\frac{A+B}{2}}$
  - $\boxed{r=\frac{AB}{2}}$




- مرکز و مماس: فاصله‌ی مرکز تا خط مماس را پیدا کن، این می‌شود شعاع:

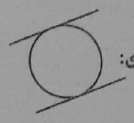



- مرکز و طول وتر: از رابطه‌ی $\boxed{\ell=2\sqrt{r^2-OH^2}}$ شعاع را پیدا کن:




$\boxed{AB=\ell}$

- مرکز روی خطِ ☁ است: مختصات مرکز را در خط صدق بده؛ شرطی برحسب $\alpha$ و $\beta$ پیدا کن...
- مماس بر دو خط موازی:



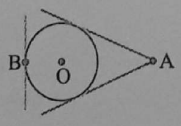
  - شعاع: فاصله‌ی دو خط موازی را پیدا کن و بعد هم نصف کن...
  - مرکز: روی خطِ موازیِ این دو و وسطِ آن‌ها قرار دارد...
- گذرنده از سه نقطه: معادله‌ی دایره را $x^2+y^2+ax+by+c=0$ بگیر و سه نقطه را در این معادله قرار بده، آخرش حلِ دستگاه

## درباره‌ی مماس

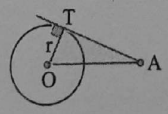
- فاصله‌ی مرکز تا خط مماس می‌شود شعاع:

$$\boxed{\underbrace{ax+by+c=0}_{\text{مماس}} \xrightarrow{O(\alpha,\beta)} \frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=r}$$

- تعداد مماس‌های موجود از یک نقطه
  - روی دایره: یکی
  - بیرون دایره: دو تا
  - درون دایره: هیچی




- طول قطعه مماس رسم شده از نقطه‌ی A
  - مفهومی: $\boxed{AT=\sqrt{OA^2-r^2}}$




  - تستی: مختصات نقطه را در معادله‌ی گسترده‌ی آماده بذار و جذر بگیر... ← $\boxed{A(x_0,y_0)}$

$$\boxed{AT=\sqrt{x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c}}$$

- معادله‌ی مماس از $A(x_0,y_0)$ روی دایره: $\boxed{(x_0-\alpha)(x-\alpha)+(y_0-\beta)(y-\beta)=r^2}$

معادله‌ی استاندارد دایره را بنویس، بعدش: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Rightarrow$



Scanned by CamScanner

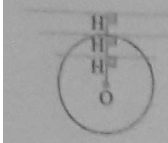
فصل ۱۳ - هندسه ۲



## وضعیت دایره با...

- **یک خط**
  - خط و دایره مماس‌اند: $OH = r$
  - خط و دایره متقاطع‌اند: $OH < r$
  - خط و دایره نقطه‌ی مشترک ندارند: $OH > r$

  فدیس: فاصله‌ی مرکز تا خط را پیدا کرده با شعاع مقایسه کن:

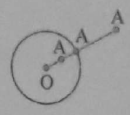
  
  

  پیدا کردن نقاط تقاطع: $x$ را از معادله‌ی خط برحسب $y$ پیدا کن و در معادله‌ی دایره بذار و معادله‌ی حاصل را حل کن.

- **محورهای مختصات**
  - مماس بر محور $x$ هاست: $|\beta| = r$
  - مماس بر محور $y$ هاست: $|\alpha| = r$
  - مماس بر هر دو محور است: $|\alpha| = |\beta| = r$ ← دایره از نقطه‌ی $(a, b)$ می‌گذرد ← $\alpha$، هم‌علامت $a$ و $\beta$، هم‌علامت $b$ است / قدر مطلق‌ها را مناسب بردار

## درون و بیرون دایره

- **مفهومی (هندسی)**
  - نقطه روی دایره است: $OA = r$
  - نقطه بیرون دایره است: $OA > r$
  - نقطه درون دایره است: $OA < r$

- **با داشتن معادله‌ی استاندارد: مختصات نقطه را به جای $x$ و $y$ معادله بذار** — $A(x_0, y_0)$
  - نقطه روی دایره است: $(x_0-\alpha)^2+(y_0-\beta)^2=r^2$
  - نقطه بیرون دایره است: $(x_0-\alpha)^2+(y_0-\beta)^2>r^2$
  - نقطه درونِ دایره است: $(x_0-\alpha)^2+(y_0-\beta)^2<r^2$

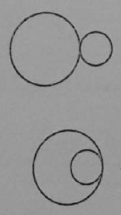
- **با داشتن معادله‌ی گسترده: مختصات نقطه را به جای $x$ و $y$ معادله بذار**
  - نقطه روی دایره است: $x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c=0$
  - نقطه بیرون دایره است: $x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c>0$
  - نقطه درون دایره است: $x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c<0$

## دو دایره

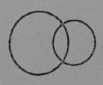
- **ابزارهای لازم**
  - فاصله‌ی دو مرکز: $OO' = d$
  - اندازه‌ی دو شعاع $r$ و $r'$ ← $+$ و $-$ کن ← $r+r'$ و $|r-r'|$

- **وضعیت دو دایره**
  - مماسِ بیرون: $d = r+r'$
  - مماسِ درون: $d = |r-r'|$

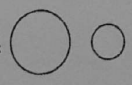
  یک نقطه‌ی مشترک دارند

  - متقاطع: $|r-r'| < d < r+r'$ ← دو نقطه‌ی برخورد

  - بدون نقطه‌ی برخورد
    - یکی خارج دیگری: $d > r+r'$ (متخارج)

    - یکی داخل دیگری: $d < |r-r'|$ (متداخل)

    - هم‌مرکز: $d = 0$

Scanned by CamScanner

# فصل در یک نگاه

**اصل ضرب**

مفهوم: وقتی عملی در چند مرحله‌ی پشت سر هم قابل انجام است، تعداد راه‌های هر کدام را در هم ضرب کن.

کاربردها:

- تستِ شمارشی که بین چند اتفاق، «و» گذاشته باشد، با اصل ضرب حل می‌شود...
- با چند رقم داده‌شده، بخواهید عددی چند رقمی بسازید — آیا تست حرفی از تکرار زده است؟
  - خیر ← تکرار مجاز است.
  - بله ← وقتی گفته، تکرار مجاز نیست.
- با چند حرف داده‌شده، بخواهید کلمه‌ای بسازید.

همیشه موقع پر کردن خانه‌ها، اول خانه‌های شرط‌دار را پر کنید و بعد بقیه را...

برای احتمال بلد باش: تعداد حالت‌ها برای:
- n تا سکه: $2^n$
- m تا تاس: $6^m$
- n تا سکه و m تا تاس با هم: $2^n \times 6^m$

**اصل جمع**

مفهوم: وقتی مجبوری برای شمارش، حالت‌بندی ارائه کنی و اتفاقِ مورد نظرِ تست را در چند حالتِ مجزا، دسته‌بندی کنی، تعداد راه‌های هر کدام را جداگانه حساب کن و در آخر با هم جمع کن.

کاربردها:

- تستِ شمارشی که بین چند اتفاق، «یا» گذاشته باشد، با اصل جمع حل می‌شود...
- حداقل و حداکثر: تستی که کلمات «حداقل» و «حداکثر» داشته باشد؛ معمولاً نیاز به حالت‌بندی دارد
  - حداقل k تا: حالت‌های خودِ k تا و بیشترهاش رو حساب کن و جمع کن.
  - حداکثر t تا: حالت‌های خودِ t تا و کمترهاش رو حساب کن و جمع کن.
- حالت‌بندی بهینه: اگر شیء خاصی نتواند در یک خانه قرار بگیرد و همچنین در خانه‌ی دیگری حتماً باشد، اونو حالت‌بندی کن یا این‌که عددی بتواند در دو خانه‌ی مختلف قرار بگیرد.

فاکتوریل: حالت‌های چیدنِ n شیء متمایز در یک ردیف (یا در n تا جا)، بدون تکرار می‌شود: $n!$

ـیل: وقتی می‌خواهی از میان n تا شیء، k تا را برداری و بعد هم آن‌ها را در یک ردیف، به‌ترتیب، بچینی: فرمول $P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$

ـ هم بودن اشیای خاص: وقتی قراره چند تا شیء خاص کنار هم باشند، آن‌ها را به هم طناب‌پیچ کن و یک شیء به‌حساب بیار، حالا از نو بشمر و جایگشت بده:
- جایگشت خود اشیای داخل دسته مهم است ← جایگشت اونا رو در جوابِ آخر ضرب کن.
- جایگشت خود اشیای طناب‌پیچ شده مهم نیست ← کار خاصی نباید بکنی...

ـیان چیدن:
- n تا از نوع اول و n تا از نوع دوم — یک در میان: $2(n!)^2$
- n تا از نوع اول و n+1 تا از نوع دوم — یک در میان: $n!(n+1)!$

ـدیگری: اگر بخواهی از بین n شیء، A قبل از B باشد، تعداد جایگشت‌ها می‌شود $\frac{n!}{2}$.

ـری دارد: همه رو بشمر و جایگشت بده، آخر سر هم جایگشتِ هر کدام از اشیایِ تکراری را در مخرج قرار بده...



Scanned by CamScanner

فصل ۱۴ - شمارش

## ترکیب (انتخاب)

- مفهوم: وقتی قرار است از میان $n$ تا شیء، $k$ تا شیء را فقط انتخاب کنی؛ بدون این‌که ترتیب چیدن آن‌ها مهم باشد... $\boxed{\binom{n}{k}}$.
- شناسایی تستی که با ترکیب حل می‌شود
  - وجود کلمه‌ی انتخاب چند شیء...
  - ساختن گروه یا تیم...
  - شمارش تعداد مثلث‌ها، چهارضلعی‌ها و...
  (به طور کلی شمارش n ضلعی‌ها با داشتن تعدادی نقطه)
- فرمول: $\boxed{C(n,k)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}}$
- فرمول‌های ترکیب
  - $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$
  - $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$
  - $\binom{n}{a}=\binom{n}{b}\Rightarrow a+b=n$
  - $\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r}$
  - $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$
- وقتی بخواهی از میان $n$ شیء، $k$ تا را انتخاب کنی که شاملِ $t$ عضو به‌خصوص بوده و فاقدِ $r$ عضو مشخص باشند، حالت‌ها می‌شود: $\boxed{\binom{n-t-r}{k-t}}$

## تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی A

- تعداد اعضای زیرمجموعه، گفته شده $\xleftarrow{\text{تعداد زیرمجموعه‌های } k \text{ عضوی}}$ $\boxed{\binom{n}{k}}$
  - شامل $t$ عضو به‌خصوص $\boxed{\binom{n-t}{k-t}}$
  - فاقد $r$ عضو مشخص‌شده $\boxed{\binom{n-r}{k}}$
- تعداد اعضای زیرمجموعه، گفته نشده $\xleftarrow{\text{تعداد زیرمجموعه‌های } A}$ $\boxed{2^n}$
  - شامل $t$ عضو به‌خصوص $\boxed{2^{n-t}}$
  - فاقد $r$ عضو مشخص‌شده $\boxed{2^{n-r}}$



Scanned by CamScanner

# فصل در یک نگاه

## مفاهیم اولیه

- فضای نمونه: مجموعه‌ی تمامِ حالت‌های ممکن است (فضاهای معروف: n فرزند، n سکه و m تاس، m تاس n سکه، پدیده ۱)
  - نماد: S

| پدیده | n سکه | m تاس | n سکه و m تاس | n فرزند |
|---|---|---|---|---|
| $n(S)$ | $2^n$ | $6^m$ | $2^n \times 6^m$ | $2^n$ |

- پیشامد: زیرمجموعه‌ی فضای نمونه است.
  - تعداد پیشامدهای قابل تعریف: $2^{n(S)}$

| مجموع | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| تعدادحالت | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۵ | ۴ | ۳ | ۲ | ۱ |

- فرمول احتمال: $\boxed{P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}}$
- ترکیبیات
  - کلمات کلیدی
    - یک گروه انتخاب می‌کنیم ← به $\binom{n}{k}$ فکر کن.
    - تعدادی شیء را می‌چینیم یا یکی یکی انتخاب می‌کنیم ← به $n!$ فکر کن.
    - حالت‌ها را جداگانه مجبوریم بشماریم ← به اصل جمع فکر کن.
    - تعداد حالت‌های ممکن برای تعدادی شیء یا مکان را باید بررسی کنیم ← به اصل ضرب فکر کن.
  - حداقل و حداکثر: این‌ها معمولاً نیاز به حالت‌بندی دارند و شاید حالتِ نامطلوبشان از خودشان بهتر باشد!
- شمارش دستی: وقتی حالت‌های مطلوب کم باشد، حالت‌ها را می‌نویسیم و بعد هم می‌شماریم.

## حل تست احتمال مقدماتی

- دختر و پسری
  - در بین n فرزند: $\boxed{\frac{\binom{n}{k}}{2^n}}$ = احتمالِ k دختر = احتمالِ k پسر
  - در بین n بار پرتاب یک سکه: $\boxed{\frac{\binom{n}{k}}{2^n}}$ = احتمالِ k بار پشت = احتمالِ k بار رو
  - در بین n بار پرتاب یک تاس: $\boxed{\frac{\binom{n}{k}}{2^n}}$ = احتمالِ k بار عدد اول = احتمالِ k بار فرد = احتمالِ k بار زوج
- متمم: $\boxed{P(A')=1-P(A)}$ (مفهوم: $A'$ یعنی A اتفاق نیفتد.)
- اجتماع: $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$ (مفهوم: حداقل یکی از پیشامدهای A یا B اتفاق بیفتند.)
  - حالت خاص: A و B ناسازگار باشند: $A\cap B=\varnothing$ ، $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$

## پول‌های احتمال

- منها: $\boxed{P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)}$ (مفهوم: A اتفاق بیفتد ولی B اتفاق نیفتد.)
  - حالت‌های دیگر: $\boxed{P(B\cap A')=P(B-A)}$ و $\boxed{P(A\cap B')=P(A-B)}$
- نه A و نه B: $\boxed{P(A'\cap B')=1-P(A\cup B)}$ (مفهوم: هیچ‌کدام اتفاق نیفتد.)
- از سه تا فقط یکی: $\boxed{P(\underbrace{A\cap B\cap C'}_{(A\cap B)-C})=P(A\cap B)-P(A\cap B\cap C)}$ (مفهوم: A و B اتفاق بیفتند ولی C اتفاق نیفتد.)



Scanned by CamScanner

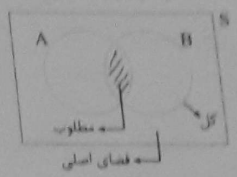
فصل ۱۵ـ احتمال



$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

$P(A|B)$، یعنی احتمال A، مشروط به اتفاق افتادن B




فرم تست: یک پیشامد می‌دهد و احتمال یک پیشامد دیگر را می‌خواهد: اگر شود، احتمال چقدر است؟

تمرین: اتفاق افتادن یا نیفتادن A، احتمال B را کم یا زیاد نمی‌کند شکل دیگر: تأثیری بر هم ندارند.

فرمول: $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

تشخیص مستقل بودن A و B: سه احتمال $P(A\cap B)$، $P(A)$ و $P(B)$ را حساب کن و درستی فرمول مستقل را بررسی کن...

فرمول احتمال در حالت مستقل:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

$$P(A-B)=P(A)-P(A)P(B)$$

$$P(A'\cap B')=(1-P(A))(1-P(B))$$

فرم تست: در بین چند پیشامد بی‌ربط به هم، قرار است بعضی اتفاق بیفتد و بعضی هم نه!

به‌جور دیگه: و بشود و و نشود و...

ایده تستی: اجتماع را با دمورگان، اشتراک کن و اشتراک هم یعنی ضرب...

$$P(A\cup B)=1-P(A'\cap B')=1-P(A')P(B')$$

A و B مستقل: فرمول مستقل $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ جداجدا احتمال‌ها را حساب کن و در هم ضرب کن.

محاسبه‌ی $P(A\cap B)$ در تست

حالت کلی: A و B مستقل نیستند فرمول ضرب احتمال $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$ ← احتمال اولی را حساب کن و نوبت دومی که شد احتمال آن را با شرط اتفاق افتادن اولی حساب کن بعد هم این دو احتمال را در هم ضرب کن...



Scanned by CamScanner

انتخاب تصادفی

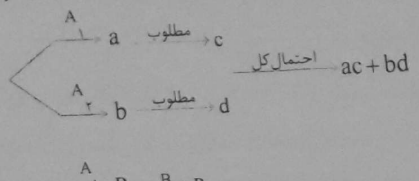
- از میان n کیسه، یکی را انتخاب کنیم — احتمال انتخاب هر کیسه $\frac{1}{n}$
- از میان a مهره سفید و b سیاه، یکی را انتخاب کنیم
  - احتمال انتخاب سفید $\frac{a}{a+b}$
  - احتمال انتخاب سیاه $\frac{b}{a+b}$

مشخص نیست در ابتدا کدام حالت

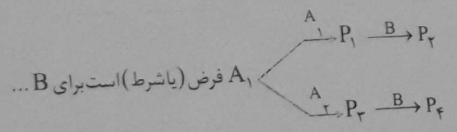
- داده‌های سؤال
  - فضای نمونه به چند پیشامد افراز شده
  - نتیجه‌ی اتفاقاتی که در تست توضیح داده شده، نامشخص و مبهم است
  - در توضیح سؤال با چند اتفاق پشت سر هم مواجهیم!
- خواسته‌ی تست
  - یک پیشامد ساده روی آخرین اتفاق

احتمال کل

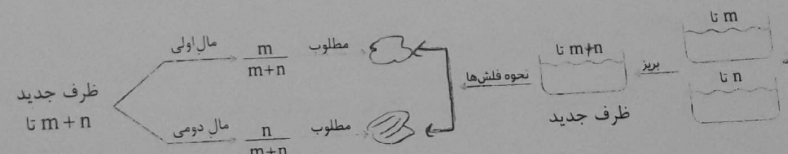
- روش حل: نمودار درختی بکش به‌ترتیب اتفاق‌ها و حالت‌بندی کن، روی هر فلش حالتِ آن را بنویس و مقابلش احتمالِ آن را...
- محاسبه عدم احتمال: حالت‌های نامطلوب را در شاخه‌های آخر بگذار کنار و عددهای در یک سطر و کنار هم را در هم ضرب کن. در نهایت عددهای شاخه‌های مجزا را با هم جمع بزن ...!




- مفهوم فلش‌ها: هر پیشامدی روی فلش‌ها برای جلویِ خودش، فرض محسوب می‌شود:




- شاخص ظرف جدید




- حضور همزمان $P(A|B)$ و $P(B|A)$ در تست $\xleftarrow{\text{فرمول}}$ $P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$



Scanned by CamScanner

# فصل در یک نگاه

## مفاهیم اولیه

- علم آمار: مجموعه روش‌هایی است شامل جمع‌آوری اعداد و اطلاعات، مرتب کردن، خلاصه‌سازی و تحلیلِ آن‌ها
- جامعه: تمامِ افرادی که در مورد یک ویژگیِ آن‌ها تحقیق می‌کنیم. $\xrightarrow{\text{حجم جامعه}}$ تعداد اعضای جامعه
- نمونه: زیرمجموعه‌ی انتخابی از جامعه.
- متغیر: یک ویژگی که قرار است در مورد آن تحقیق کنیم.

## دسته‌بندی متغیرها

- کمی: این‌ها را می‌توان شمرد یا اندازه‌گیری کرد. (قابل بیان با عدد)
  - گسسته: قابل شمارش‌اند $\xrightarrow{\text{مثال}}$ تعداد روزهای بارانی
  - پیوسته: قابل اندازه‌گیری‌اند $\xrightarrow{\text{مثال}}$ بین هر دو مقدارشان مقدار دیگری می‌توان در نظر گرفت، دما
- کیفی: قابل شمردن و اندازه‌گیری نیستند. درباره‌ی نوعِ آن‌ها می‌توان توضیح داد... (غیرقابل بیان با عدد)
  - اسمی: فقط وضعیت و نوع دارند $\xrightarrow{\text{مثال}}$ گروه خونی
  - ترتیبی: نوعی ترتیبِ طبیعی در خود دارند $\xrightarrow{\text{مثال}}$ مراحل تحصیلی

## فراوانی

- مطلق: مفهوم: به تعداد اشیایی که از یک داده داریم، می‌گوییم $\xrightarrow{\text{به‌جوردیگه}}$ یک داده چند بار تکرار می‌شود؟
  - $n$ = تعداد کل داده‌ها = جمع تمام فراوانی‌ها
- نسبی: $\dfrac{\text{فراوانی مطلق}}{\text{تعداد کل داده‌ها}}$ $\xrightarrow{\text{به‌جوردیگه}}$ $\boxed{\text{فراوانی نسبی} = \dfrac{f}{n}}$ $\xrightarrow{\text{نکته}}$ مقدارش بین صفر و یک است.

## شاخص‌های آماری

### مرکزی

- میانگین
  - نماد: $\bar{x}$
  - روش پیدا کردن: تمامی داده‌ها را جمع کن و بعد بر تعدادشان تقسیم کن.
  - به زبان ریاضی: $\boxed{\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}$
  - اگر میانگین را داده بودند میانگین را در تعدادِ کل داده‌ها ضرب کن، این‌جوری جمع داده‌ها درمیاد...
- میانه
  - نماد: $Q_2$
  - روش پیدا کردن: داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کن
    - تعداد داده‌ها فرد است ← میانه = داده‌ی وسطی
    - تعداد داده‌ها زوج است ← میانه = میانگین دو تا داده‌ی وسطی
  - پیدا کردن شماره‌ی داده‌ی وسطی
    - تعداد داده‌ها فرد است ← $\boxed{\text{شماره‌ی وسطی} = \dfrac{n+1}{2}}$
    - تعداد داده‌ها زوج است ← $\boxed{\dfrac{n}{2} \text{ و بعدی آن، شماره‌های داده‌های وسطی}}$

### پراکندگی

- دامنه‌تغییرات
  - نماد: $R$
  - مفهوم: کوچک‌ترین داده را از بزرگ‌ترین داده، کم کن: $\boxed{R = \max - \min}$
- واریانس
  - نماد: $\sigma^2$
  - روش پیدا کردن در حالت کلی
    - ریاضی: $\boxed{\sigma^2 = \dfrac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$
    - فارسی: اول میانگین را پیدا کن، بعد هر داده را منهای میانگین کرده و مجذور کن، آخر سر جمعِ همه‌ی این‌ها را به تعداد کل داده‌ها تقسیم کن.
  - فرمول‌های دیگر
    - $\boxed{\sigma^2 = \dfrac{n^2 - 1}{12} \times d^2}$ : وقتی داده‌ها، دنباله‌ی حسابی با قدرنسبتِ $d$ باشند.
    - $\boxed{\sigma^2 = \dfrac{M}{n} - \bar{x}^2}$ : وقتی مجموع مجذورات داده‌ها داده شده، یعنی $M$.
  - مفهوم: هر قدر $\sigma^2$ بیشتر باشد، یعنی پراکندگیِ داده‌ها بیشتر است.



Scanned by CamScanner

- انحراف معیار: این، جذر واریانس است: $\sigma$، یعنی واریانس حساب کن بعد هم جذرش رو بگو.
- ضریب تغییرات: $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ هرچه CV بیشتر بین دو نفر، یعنی دقت کمتر.

## چارک

- $Q_2$ = چارک دوم: این همان میانه است.
- $Q_1$ = چارک اول: وقتی داده‌ها از کوچک به بزرگ مرتب شدند و میانه حساب شد، بعدش از داده‌های کمتر از میانه، دوباره میانه بگیر! این می‌شود $Q_1$.
- $Q_3$ = چارک سوم: وقتی داده‌ها از کوچک به بزرگ مرتب شدند و میانه حساب شد، بعدش از داده‌های بیشتر از میانه، دوباره میانه بگیر! این می‌شود $Q_3$.

## دستکاری برای داده‌های آماری

(اگر داده‌ها را از $ax+b$ تبدیل کنیم)

- میانگین: از $\bar{x}$ می‌شود: $a\bar{x}+b$
- میانه: از $Q_2$ می‌شود: $aQ_2+b$
- واریانس: از $\sigma^2$ می‌شود: $a^2\sigma^2$
- انحراف معیار: از $\sigma$ می‌شود: $|a|\sigma$
- دامنه تغییرات: از $R$ می‌شود: $|a|R$

$x \to ax+b$ ←

- $\bar{x} \to a\bar{x}+b$
- $Q_2 \to aQ_2+b$
- $\sigma^2 \to a^2\sigma^2$
- $\sigma \to |a|\sigma$
- $R \to |a|R$

## دستکاری در ضریب تغییرات

- ضرب عددِ
  - مثبت: CV را تغییر نمی‌دهد.
  - منفی: CV را قرینه می‌کند.
- جمع کردن تمامی داده‌ها با
  - عددِ مثبت ← CV را کم می‌کند.
  - عددِ منفی ← CV را زیاد می‌کند.

## اگر تمام داده‌ها مساوی باشند

(همگی k باشند)

- $k$ = چارک سوم = چارک اول = میانه = میانگین
- $\sigma^2 = \sigma = CV = R = 0$، عکس این جمله خیلی مهمه: **صفر شدن واریانس، انحراف معیار یا ضریب تغییرات، یعنی همه‌ی داده‌ها مساوی‌اند.**



Scanned by CamScanner